

粉体中の粒子間接触力の分布

金 谷 健 一*
Ken-ichi Kanatani

1. はじめに

粉体中の粒子間の接触力を知ることは粉体の破碎、成型、その他種々の加工においてきわめて重要なことである。そのような微視的接触力の分布を巨視的なデータのみから仮想仕事の原理を用いて推定する方法が筆者によって土質力学に関連して発表されているが¹⁾、これは粉体工学においても重要な結果であると思われるのでその一部を要約し紹介する。

2. 粒子接触力と巨視的応力

粉体が一様な応力状態にあっても、個々の粒子のうける力はばらついているはずである。そこで、それらを多数の粒子にわたって平均した力が、ある代表的な平均粒径をもつ球状の粒子に作用していると考えよう。この代表的な粒子の考え方は長尾の導入したものである²⁾。十分多数の粒子について平均すれば、代表的粒子に働く力は Fig. 1 のようになめらかな分布で近似できるであろう。そこで、この粒子の中心を始点とする単位ベクトル n_i の方向の微小立体角 $d\Omega$ 中の接触点数が $D(n)d\Omega$ 、接触力が $f_i(n)$ であるように平均接触点分布密度 $D(n)$ と平均接触力 $f_i(n)$ とを定義する。以下、直交座標系に

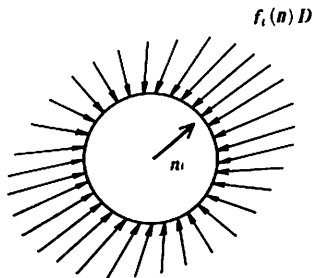


Fig. 1 代表的粒子のまわりの接触力の分布

関するテンソル記法を用い、指標 i, j, k, l, \dots をもつ成分を 1, 2, 3 にわたって総和する総和記号は省略する。粒子はつりあい状態にあるから、接触力の合力は 0 でなければならない。ゆえに

$$f f_i D d\Omega = 0 \quad \dots\dots(1)$$

である。また、モーメントもつりあっているから

$$f f_{(i n_j)} D d\Omega = 0 \quad \dots\dots(2)$$

である。ただし [] は指標の反対称化を表わす。(2) 式の被積分関数はベクトル記号では $(\frac{1}{2}) f \times n D$ と表わされる。しかし、このような表記は解析に不便である。

ここで、この粉体に次のような一様な変形を加えることを考える。

$$x_i' = A_{ij} x_j \quad \dots\dots(3)$$

これは、点 x_i が変形後に点 x_i' に移ることを表わしたものである。そこで変位を $u_i = x_i' - x_i$ とおくと

$$u_i = F_{ij} x_j, \quad F_{ij} \equiv A_{ij} - \delta_{ij} \quad \dots\dots(4)$$

となる。ただし δ_{ij} は Kronecker のデルタである。 F_{ij} は変形テンソルとよばれる。これを次のように対称部分と反対称部分とに分解する。

$$F_{ij} = E_{ij} + \Omega_{ij} \quad \dots\dots(5)$$

$$E_{ij} \equiv F_{(ij)} (= (F_{ij} + F_{ji})/2)$$

$$\Omega_{ij} \equiv F_{[ij]} (= (F_{ij} - F_{ji})/2) \quad \dots\dots(6)$$

ここに () は指標の対称化を表わすものである。 E_{ij} はひずみテンソルであり、 Ω_{ij} は全体としての剛体回転を表わすものである³⁾。

さて、粒子はすべて剛体であるとする。すると、粒子間の接触状態が変わらない限り、全体としての変形は実際には起きないはずである。しかし、仮想的にそれが(3)式のように変形を受けたとし、かつ粒子間接触状態が不変であったとする。このような仮想的変形が力学におい

昭和55年4月1日受付

* 群馬大学工学部情報工学科(〒376 桐生市天神町1-5-1)
TEL 0277-22-3181

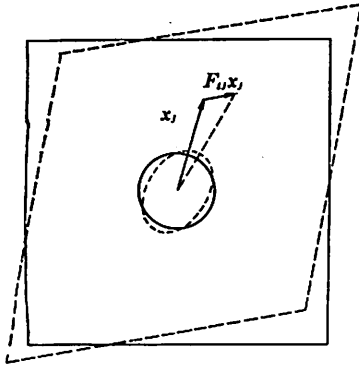


Fig. 2 代表的粒子の仮想変形

て仮想変形とよばれるものである。この仮想変形によって代表的粒子が Fig. 2 のように球から楕円に変形したとする。(代表的粒子も剛体である。)すると(4)式より、この粒子の n_i 方向の接触点の変位は

$$\xi_i(n) = a F_{ij} n_j \quad \dots\dots(7)$$

となる。ただし a はこの代表的粒子の半径である。上の接触点の接触力を $f_i(n)$ とすると、この力のする仮想仕事は $f_i \xi_i$ であるから、この代表的粒子の接触力全体のする仮想仕事は

$$\int f_i \xi_i D d\Omega = a F_{ij} \int f_i n_j D d\Omega \quad \dots\dots(8)$$

である。ところがモーメントのつりあい式(2)より、 $f_i n_j D$ は対称テンソルである。したがって(5)式の F_{ij} との積をつくると反対称部分 Ω_{ij} との積は 0 となる。ゆえに(8)式は

$$a E_{ij} \int f_i f_j n_j D d\Omega \quad \dots\dots(9)$$

に等しい。この粉体の充てん率を γ とすると、単位体積中に代表的粒子が $\gamma/(4/3)\pi a^3$ 個あると考えてよいから(これを α の定義と考えてよい)、単位体積あたりにされる仮想仕事 W は

$$W = \frac{3}{4} \frac{\gamma}{\pi a^2} E_{ij} \int f_i f_j n_j D d\Omega \quad \dots\dots(10)$$

である。一方、この粉体の応力が σ_{ij} であれば、仮想ひずみ E_{ij} が生じたときの仮想仕事 W は

$$W = \sigma_{ij} E_{ij} \quad \dots\dots(11)$$

となる。(10)、(11)式を比較すれば、これらが任意の変形に対して等しい条件として

$$\sigma_{ij} = \frac{3}{4} \frac{\gamma}{\pi a^2} \int f_i f_j n_j D d\Omega \quad \dots\dots(12)$$

となる。これが微視的な粒子接触力と巨視的な応力とを結びつける関係式である。これが単位面積当りの力という応力の定義と一致することも確かめられる。

3. 接触点数と接触力の分布

代表的粒子の接触力の分布 $f_i D$ として次のようなモーメント展開を考える

$$f_i D = A_i + B_{ij} n_j + C_{ijk} n_j n_k + \dots \quad \dots\dots(13)$$

そして、第一近似として 2 次以上のモーメントの項を省略してみる。つりあい条件(1)、(2)に代入すると

$$\left. \begin{aligned} \int (A_i + B_{ij} n_j) d\Omega &= 0 \\ \int (n_k A_i + n_k B_{ij} n_j) d\Omega &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(14)$$

となるが、よく知られた恒等式

$$\left. \begin{aligned} \int n_i d\Omega &= 0 \\ \int n_i n_j d\Omega &= \frac{4}{3} \pi \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(15)$$

より

$$A_i = 0, \quad B_{(ij)} = 0 \quad \dots\dots(16)$$

を得る。これを(13)式に適用して(12)式に代入すると、ふたたび(13)式を用いて

$$\sigma_{ij} = (\gamma/a^2) B_{ij} \quad \dots\dots(17)$$

を得る。これを B_{ij} について解いて(13)式に適用すると

$$f_i D = (a^2/\gamma) \sigma_{ij} n_j \quad \dots\dots(18)$$

となる。これが、応力が σ_{ij} の状態にある粉体の微視的接触力分布を与える式である。

次に接触点分布 D を考える。小田や小西の実験によれば、接触点分布は主応力方向に、その主応力の大きさにほぼ比例して増大する傾向が見られる^{4,5)}。そこで、次のような 2 次形式で表わされると考えるのが妥当であろう。

$$D = -c \sigma_{ij} n_i n_j \quad \dots\dots(19)$$

ただし c は充てん率に依存するスカラーである。(負の符号をつけたのは、応力の定義として引張りを正と約束しているからである。)ところで D を全立体角にわたって積分したものは一粒子当りの平均接触数、すなわち配位数 N である。

$$N = \int D d\Omega \quad \dots\dots(20)$$

ゆえに(19)式より(公式(19)を用いて)

$$N = -c \sigma_{ij} \times (4/3) \pi \delta_{ij} \\ = -(4/3) c \pi \sigma_{kk} \quad \dots\dots(21)$$

$$\therefore c = -N/4\pi p \quad \dots\dots(22)$$

ただし、静圧力を $p(\equiv -\sigma_{kk}/3)$ とおいた。これより(21)式から

$$D(n) = -(N/4\pi p) \sigma_{ij} n_i n_j \quad \dots\dots(23)$$

となる。これが、応力 σ_{ij} の状態にある粉体の微視的な接触点分布を与える式である。

(23)式を(2)式に代入すると、任意の方向 n_i の一接触点あたりの接触力が

$$f_i(n) = -\frac{4\pi a^2 p}{\gamma N(\nu)} \frac{\sigma_{ij} n_j}{\sigma_{kl} n_k n_l} \quad \dots\dots(24)$$

となる。配位数 N は一般に充てん率 γ の関数として表わされる。そして、その関数形に関する多くの実験式が提案されている。ゆえに(24)式により、応力 σ_{ij} の状態にある粉体の充てん率 γ を知れば、任意の方向 n_i の一接触点あたりの接触力が求まることになる。

4. ま と め

以上で、粉体中の粒子の微視的接触力の分布を巨視的なデータのみから仮想仕事の原理を用いて推定する方法を述べた。ただし粒子は剛体と仮定した。このようなテンソルによる解析はその他多くの圧縮やせん断の微視的機構を記述するのに役立つ¹⁾。粉体工学の多くの分野でこのような方々が活用されることを期待している。

引 用 文 献

- | | |
|--|--|
| 1) 金谷健一：土質工学会論文報告集，20 (1980) | 4) Oda, M. : <i>Soils and Foundations</i> , 12, 1 (1972) |
| 2) 長尾高明：日本機械学会論文集，43, 4038(1977) ; 44, 1912 (1978) ; 44, 2967 (1978) | 5) Oda, M. and J. Konishi : <i>Soils and Foundations</i> , 14, 25 (1974) |
| 3) 金谷健一：土と基礎，28 (1980) | |

Author's Abstract

Distribution of Interparticle Contact Force in Granular Materials

by

Ken-ichi KANATANI

(Department of Computer Science, Gunma University)

Distributions of the number of interparticle contact points and the contact force of granular materials are analyzed by means of the principle of virtual work. The expressions of these microscopic distributions are given in terms of observable macroscopic quantities.

List of Figures

Fig. 1 Force distribution around the representative particle.

Fig. 2 Virtual deformation of the representative particle.

正誤表 (Vol. 17 No. 1 ~ No. 6 に掲載分)

本会誌に以下の誤りがありましたので、ここに訂正し、お詫び申し上げます。

誤	正
No. 2 表紙目次「市場品のフライアッシュと日本工業規格との関連」	「市場品のフライアッシュと日本工業規格との関連」
No. 4 表紙目次および目次の著者名 菅沼 淳	菅沼 淳
No. 6 P. 324 森山龍一先生 (福岡共立大)	森山龍一先生 (福岡教育大)

*正誤表の掲載について
粉体工学会誌の研究報告、参考資料、総説等の正誤表を下記のように定期的に掲載します。
著者の皆様、よろしくご協力下さい。
No.1~No.6の分は同じ Vol. のNo.9に掲載
原稿提出締切 毎年 6月30日

No.7~No.12の分は次の Vol. の No.3 に掲載
原稿提出締切 毎年12月28日
原稿提出先：粉体工学会 編集事務局
〒 606 京都市左京区田中関田町2-7
思文閣会館33号