

# 粒状体の流れ特性の研究\*

A Study of Flow Characteristics of Granular Materials

金谷 健一\*\*

Ken-ichi Kanatani

## 1. はじめに

多数の粒子からなる集合の力学的挙動は工学の多くの分野で関心がもたれている。それらは粉体、砂、土石流というようにスケールはそれぞれ異なるが、力学的特性は共通の原理より導かれると考えられる。従来は個々別々の分野で独自に研究が進められていたが、最近では“粒状体”という名称で統合的研究をめざす動きがさかんである<sup>1)</sup>。特に米国では粒状体の力学を連続体力学として基礎づけようとする Goodman-Cowin 理論<sup>2,4)</sup>が注目されている。これは粒状体の体積充てん率を運動変数にとり、有理力学 (Rational Mechanics)<sup>5)</sup> とよばれる方法論により、テンソル関係式の形式的不変性の考察を中心とするものである。したがって、微視的な粒子間相互作用など考慮されておらず、構成方程式も具体的な形で提示されない。このような難点を克服するため筆者は、微視的モデルに基づいて、大島<sup>6,7)</sup>、Eringen<sup>8,9)</sup>らの極性流体の理論による連続体理論を発表した<sup>10,11)</sup>。

理論の対象としたのは非粘性粒子系の低圧力、高速度の流れである。低圧力とは粒子の弾性係数にくらべて圧力が低く、粒子を剛体とみなせる場合であり、高速度とはすべての粒子が他の粒子と相対的に運動している場合を意味する。したがって、粒子間相互作用は運動まさと衝突のみとなる。代表的なものが斜面上の重力流れである。古くからの実験 (高橋<sup>12)</sup>、林ら<sup>13)</sup>、大山<sup>14)</sup>、庄司<sup>15)</sup>)によれば、斜面上の流下には大別して二種類の流れがあることが知られている。ひとつは、粒子が回転しながら整然と流れる“遅い流れ”であり、粒子間相互作用はまさつが支配的である。他方は斜度を上げていくと生じるもので、粒子間に激しい衝突が起こり、内部に乱れが発達する“速い流れ”である。筆者はそれぞれの場

合を微視的に考察し、それに基づいた連続場の方程式を導き、粒状体の流れ特性を明らかにした。“遅い流れ”では内部応力と速度勾配との間に一対一対応がつかず、剪断応力は静圧力と、速度勾配テンソルの主軸方向とによって定まる。その結果、流れが可能になる特定の角度、すなわち安息角が存在する。従来、このことを考慮しない解析が多かった。たとえば栗原ら<sup>16)</sup>や鈴木ら<sup>17)</sup>は回転円筒内の流れを粘性流体として解析しているが、これは非現実的である。粘性流体では剪断力は速度勾配のみによって定まり、たとえば自由表面では速度勾配は0でなければならない。筆者の理論では、自由表面で静圧力が0となる結果、任意の速度勾配が許される。実験によっても、自由表面付近できわめて大きな速度勾配が観測されている<sup>18,19)</sup>。“速い流れ”の場合では、衝突の効果を理論化すると、いわゆる“法線応力効果”が見られ、これも実験と一致するものである<sup>19,20)</sup>。

ところで、筆者の報告<sup>10)</sup>において、粒子間相互作用による静圧力の算定法が不十分であることが長尾<sup>21)</sup>によって指摘された。そこで本報告では“遅い流れ”に関し、その点をより精密に考察し、既報<sup>10)</sup>で触れなかった巨視的等価応力の意味づけを変分原理を用いて行なう。そして、極性流体的扱いによって生じる偶応力の効果を調べるため、平行平板間の流れを計算し、斜面上の流れも考察する。

## 2. 極性流体と基礎方程式

既報<sup>10)</sup>の結果を要約する。粒子がほぼ一様に回転しながら流れてゆく場合、粒子の速度  $v_i$  と回転速度  $\omega_{ji}$  とを連続変数と考えることができる。ここで、 $\omega_{ji}$  は反対称テンソル ( $\omega_{ji} = -\omega_{ij}$ ) で、 $\omega_{12} = z$  軸に平行な軸のまわりの正方向の角速度、etc. である。これらふたつの運動変数に対応する応力が通常の応力  $\sigma^{ji}$  ( $=j$  面を通して  $v_i$  を加速(減速)する力) と偶応力  $\mu^{kji}$  ( $=k$  面を通して  $\omega_{ji}$  を加速(減速)する偶力) とである。質量保存則、運動量保存則、角運動量保存則は次のように表わせる<sup>9,22)</sup>。

昭和53年9月14日受理

\* 昭和53年度粉体工学会秋期研究発表会にて講演 (1978.10 東京)

\*\* 群馬大学工学部情報工学科 (〒376 桐生市天神町1-5-1)

TEL0277-22-3181

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0 \quad \dots\dots(1)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v^i dV = \int_V \rho b^i dV + \int_S \sigma^{ji} n_j dS \quad \dots\dots(2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V (2x^{(j} v^{i)}) + \frac{2}{5} \rho a^2 \omega^{ji} dV &= \int_V 2\rho x^{(j} b^{i)} dV \\ &+ \int_S (2x^{(j} \sigma^{kl)} n_k + \mu^{kji} n_k) dS \quad \dots\dots(3) \end{aligned}$$

ただし  $\rho$  はみかけの密度、 $b^i$  は単位質量当たりの外力、 $x^i$  は位置ベクトル、 $a$  は粒子の慣性半径である。 $V$  は流れとともに移動する任意の領域で、粒子径にくらべて大きいものとする。 $S$  はその境界表面であり、 $n_i$  は外向き単位法線ベクトルである。[ ] は成分の交代化を表わす。

(すなわち  $A_{[ij]} = (A_{ji} - A_{ij})/2$ , etc.) ただし、| | では含まれた添字は交代化を受けない。そして、添字に関する総和規約を用いる。なお、座標系は正規直交系を用いるので、添字の上下、すなわち反変、共変の区別はしない\*。

発散定理により次の連続の方程式、運動方程式、角運動方程式を得る<sup>9, 22)</sup>。

$$\rho \frac{dv^i}{dt} + \rho \partial_i v^i = 0 \quad \dots\dots(4)$$

$$\rho \frac{dv^i}{dt} = \partial_j \sigma^{ji} + \rho b^i \quad \dots\dots(5)$$

$$(2/5) \rho a^2 \frac{d\omega^{ji}}{dt} = \partial_k \mu^{kji} + 2\sigma^{(ji)} \quad \dots\dots(6)$$

ただし、 $\partial_i = \partial/\partial x^i$ 、 $d/dt = \partial/\partial t + v^i \partial_i$  である。このように発散定理を用いた結果は、微視的な不均一をならして平均化した場の記述となっている。以下、流れは非圧縮で密度は一定とする ( $\partial_i v^i = 0$ ,  $\rho = \text{const.}$ )。

エネルギー保存則は次のように表わせる。

$$dW/dt - dK/dt = \int_V \Phi dV \quad \dots\dots(7)$$

ただし、 $dW/dt$  は外力のなす仕事率、 $K$  は運動エネルギー、 $\Phi$  は単位体積中で単位時間当たりにまさつて失なわれる散逸エネルギーである。 $dW/dt$ 、 $K$  は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} dW/dt &= \int_V \rho b^i v^i dV + \int_S [\sigma^{ji} n_j v^i \\ &+ (1/2) \mu^{kji} n_k \omega_{ji}] dS \quad \dots\dots(8) \end{aligned}$$

$$K = \int_V \{ (1/2) \rho v^i v^i + (1/10) \rho a^2 \omega_{ji} \omega^{ji} \} dV \quad \dots\dots(9)$$

\* 一般の曲線座標系ではベクトルやテンソルの成分の表記方法に二種類あり、それぞれ反変成分、共変成分とよばれ、添字の上下の位置で区別する約束があるが、直交座標系では両者は一致し、普通の定義となる。ここでも以下普通の定義を用いる。たとえば  $v^i$ 、 $u_i$  いずれも  $i=1, 2, 3$  に対して、 $x$  成分、 $y$  成分、 $z$  成分を意味する。

これらを(7)式へ代入し、発散定理を用いて次の結果を得る<sup>9, 22)</sup>。

$$\Phi = \partial^j E_{ji} + \sigma^{(j)} R_{ji} + (1/2) \mu^{kji} \Omega_{kji} \quad \dots\dots(10)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{ji} &\equiv \sigma^{(ji)} - (1/3) \delta_{ji} \sigma^{kk} \\ E_{ji} &\equiv \partial_{(j} v_{i)} - (1/3) \delta_{ji} \partial_k v^k \\ R_{ji} &\equiv \partial_{(j} v_{i)} - \omega_{ji} \\ \Omega_{kji} &\equiv \partial_k \omega_{ji} \end{aligned} \right\} \dots\dots(11)$$

ただし、( ) は成分の対称化 ( $A_{(ji)} = (A_{ji} + A_{ij})/2$ , etc.) を示し、 $\delta_{ji}$  は Kronecker のデルタであり  $i=j$  のとき 1、 $i \neq j$  のとき 0 をとる。

### 3. 等価応力と変分原理

運動方程式(5)、(6)を解くには構成方程式が必要であるが、粒子間の相互作用を直接、仔細に考慮することは不可能である。そこでエネルギー散逸に着目する。まず、粒子間のまさつて失なわれる散逸エネルギー  $\Phi$  を、統計的平均操作を用いて推定し、次に、そのような散逸を引き起こす等価な応力  $\sigma^{ji}$ 、 $\mu^{kji}$  を(10)式が恒等的に成立するように定める。通常の力学問題では、特定の散逸機構(まさつ、粘性、その他)を仮定すると、 $\Phi$  は変形速度の同次式となることが多い。 $\Phi$  が  $E_{ji}$ 、 $R_{ji}$ 、 $\Omega_{kji}$  の  $k$  次同次式であるとしよう。このとき Euler の定理により

$$\Phi = \frac{1}{k} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial E_{ji}} E_{ji} + \frac{\partial \Phi}{\partial R_{ji}} R_{ji} + \frac{\partial \Phi}{\partial \Omega_{kji}} \Omega_{kji} \right) \quad \dots\dots(12)$$

となる\*。これと(4)式とを比較して

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{ji} &= (1/k) \partial \Phi / \partial E_{ji} \\ \sigma^{(j)} &= (1/k) \partial \Phi / \partial R_{ji} \\ (1/2) \mu^{kji} &= (1/k) \partial \Phi / \partial \Omega_{kji} \end{aligned} \right\} \dots\dots(13)$$

とすればよいことがわかる。応力  $\sigma^{ji}$  は

$$\sigma^{ji} = -p \delta_{ji} + \bar{\sigma}^{ji} + \sigma^{(ji)} \quad \dots\dots(14)$$

によって定まる。ただし  $p$  は巨視的な静圧力であり、これは非圧縮性の拘束条件  $\partial_i v^i = 0$  に関する Lagrange 乗

\* 関数  $f(X_1, X_2, \dots, X_N)$  が  $k$  次同次式であるとは  $f(tX_1, tX_2, \dots, tX_N) = t^k f(X_1, X_2, \dots, X_N)$  となることをいう。たとえば  $X^2 + 2X^2 Y + YZ^2$  は  $X, Y, Z$  の三次同次式である。定義式の両辺を  $t$  で微分すると  $\sum_{\alpha=1}^N (\partial f / \partial X_\alpha) X_\alpha = k t^{k-1} f$  となる。ここで  $t=1$  とおくと Euler の定理  $f = (1/k) \sum_{\alpha=1}^N (\partial f / \partial X_\alpha) X_\alpha$  を得る。

数として定まる。

このような等価応力の決定法は変分原理と関連している。流体力学でよく知られているように、慣性項(対流項)  $v^j \partial_j v_i$  を変分原理から導くことはできない<sup>23)</sup>。そこで通例に従って、慣性項が無視できる定常な流れを考える。このとき次の定理が成立する。

定理  $V_0$  を固定した領域とし、境界条件として全境界面  $S$  が自由表面を与える部分  $S_0$  と  $v_i, \omega_{ji}$  の値を指定する部分  $S_1$  とから成っているとす。このとき、可能な流れは次の  $\Psi$  の極値を与えるものである。

$$\Psi(v_i, \omega_{ji}) = \int_{V_0} [(1/k)\Phi - p \partial_i v^i - \rho b^i v_i] dV \quad \dots\dots(15)$$

(証明)  $v_i \rightarrow v_i + \delta v_i, \omega_{ji} \rightarrow \omega_{ji} + \delta \omega_{ji}$  として  $\Psi$  の第一変分をとる。

$$\begin{aligned} \delta \Psi &= \int_{V_0} \left[ \frac{1}{k} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial E_{ji}} \delta E_{ji} + \frac{\partial \Phi}{\partial R_{ji}} \delta R_{ji} + \frac{\partial \Phi}{\partial \Omega_{kji}} \delta \Omega_{kji} \right) \right. \\ &\quad \left. - p \delta_i \delta v^i - \rho b^i \delta v_i \right] dV \\ &= \int_{V_0} [\sigma^{ji} \delta_j \delta v_i + \sigma^{(ji)} (\delta_j \delta v_i - \delta \omega_{ji}) \\ &\quad + (1/2) \mu^{kji} \delta_k \delta \omega_{ji} - p \delta_i \delta v^i - \rho b^i \delta v_i] dV \\ &= - \int_{V_0} [(\partial_j \sigma^{ji} + \rho b^i) \delta v_i + ((1/2) \partial_k \mu^{kji} \\ &\quad + \sigma^{(ji)}) \delta \omega_{ji}] dV \end{aligned}$$

これは(5), (6)式により0となる。ただし境界積分は境界上の仮定  $\sigma^{ji} \delta v_i = 0, \mu^{kji} \delta \omega_{ji} = 0$  により0となることを用いてある。(証明おわり)

さて、(15)式の被積分項で  $-p \delta_i \delta v^i$  の項は、非圧縮性の付帯拘束条件をつけることによって除くことができる。また、すべての境界上で  $v_i$  が指定されるとし、外力  $b^i$  がポテンシャルから導かれるとき、すなわち  $b^i = -\partial_i \varphi$  のとき、発散定理により  $-\rho b^i v_i$  の項も除くことができる<sup>23)</sup>。また、後の計算でわかるように極値は最小値となる。この結果は次のように表わせる。

$$\int_{V_0} \Phi dV \rightarrow \text{最小値}$$

これは“最小散逸の原理”とよばれるもので、べき乗則流体などの広い範囲の非 Newton 流体で成立するものである<sup>23)</sup>。結局、われわれの等価応力の決定法は最小散逸の原理に基づくものであることがわかる。

#### 4. 粒子間相互作用と構成方程式

散逸関数  $\Phi$  の形を具体的に定めるため、粒子モデルを

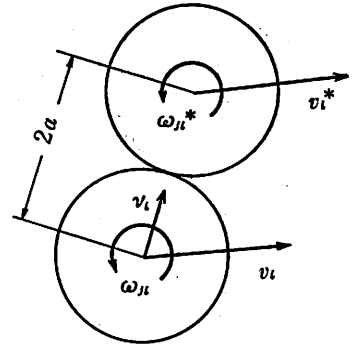


Fig. 1 接触する回転二粒子

考える。ここでは理想化して、半径  $a$ 、質量  $m$  の同一の剛体球が流れているとし、粒子間の間隙水はなく、粘着力もないものとする。また、気体との相互作用も考えない。Fig. 1 のような特定の接触二粒子を考える。粒子モデルと連続理論との対応として

$$\left. \begin{aligned} v_i^* &= v_i + 2a v_j D_{ji} \\ \omega_{ji}^* &= \omega_{ji} + 2a v_k \Omega_{kji} \end{aligned} \right\} \dots\dots(16)$$

とする。ただし  $D_{ji} \equiv \partial_j v_i$  であり、 $v_j$  は図のような、接触方向を指す単位ベクトルである。接触点における両球の速度はそれぞれ  $v_i + a v_j \omega_{ji}, v_i^* - a v_j \omega_{ji}^*$  であるから、相対速度の接線成分は

$$\xi_i = 2a (v_j D_{ji} - v_j \omega_{ji} - v_k v_j v_i D_{ji} - a v_k v_j \Omega_{kji}) \quad \dots\dots(17)$$

となる。流れの中では粒子は自由に配列を変え得るので、 $v_i$  の方向は完全にランダムであると考えられる。そこで、 $v_i$  を全立体角上に一様分布する確率変数と考え、 $\xi_i$  を二乗平均の意味で平均し、 $\xi \equiv \sqrt{\overline{\xi_i \xi_i}}$  とおく。バーは全立体角上の平均である。公式  $v_j v_i = (1/3) \delta_{ji}$ , etc. を用いて、最終的に次の結果を得る。

$$\xi = \frac{2\sqrt{6}}{3} a \hat{\omega} \quad \dots\dots(18)$$

$$\hat{\omega} \equiv \sqrt{\frac{3}{10} E_{ji} E_{ji} + \frac{1}{2} R_{ji} R_{ji}} + \frac{a^2}{10} (\Omega_{kkj} \Omega_{llj} + \Omega_{kji} \Omega_{kji} + \Omega_{kji} \Omega_{jki}) \quad \dots\dots(19)$$

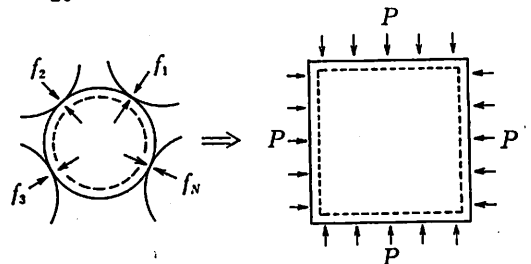


Fig. 2 粒子の接触力と等価な巨視的応力

次に平均接触力を求める。Fig. 2 のように  $f_K (K=1, 2, \dots, N)$  を接触力の垂直成分とする。  $N$  は一粒子の接触点数(配位数)である。平均接触力を  $\bar{f} = \sum f_K / N$  とおく。ここで割合  $\gamma$  だけの仮想圧縮を考えれば、一粒子になされる仮想仕事は  $\sum f_K / 4\pi a^2 \times \gamma \times (4/3)\pi a^3 = (1/3)aN \bar{f} \gamma$  である。単位体積中の粒子数は  $\rho/m$  であるから、単位体積当たりの仮想仕事は  $(1/3)N\bar{f}(\rho/m) a \gamma$  である。ところがこれは巨視的な圧力  $p$  のする仮想仕事  $p \gamma$  に等しくなければならない。なぜなら、 $p$  は非圧縮性の拘束条件に関する Lagrange 乗数であるからである。ゆえに次の結果を得る。

$$\bar{f} = \frac{3mp}{N\rho a} \quad \dots\dots(20)$$

ところで、 $K$  番目の接触点でのまさつ力は、運動まさつ係数を  $\mu$  とすれば  $\mu f_K$  であり、接触速度は平均的に  $\xi$  と考えられるから、まさつ仕事率は  $\mu f_K \xi$  である。一粒子では合計して  $\mu N \bar{f} \xi$  であり、単位体積中では  $\rho/m$  をかけて 2 で割ったものとなる。2 で割るのは、各接触点が二重に数えられているためである。(19), (20)式を用いれば、単位体積当たりのまさつ散逸仕事率  $\Phi$  は次のようになる。

$$\Phi = \sqrt{6} \mu \rho \hat{\omega} \quad \dots\dots(21)$$

これは  $E_{ji}, R_{ji}, \Omega_{kji}$  の一次同次式であるから、(21)式で  $k=1$  として、次のような構成方程式を得る。(付録1参照)

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}^{ji} &= \frac{3\sqrt{6}\mu p}{10} \frac{p}{\hat{\omega}} \left( \partial_{jv_i} - \frac{1}{3} \delta_{ji} \partial_k v^k \right) \\ \sigma^{(ji)} &= \frac{\sqrt{6}\mu p}{2} \frac{p}{\hat{\omega}} \left( \partial_{jv_i} - \omega_{ji} \right) \\ \mu^{kji} &= \frac{\sqrt{6}\mu a^2 p}{5} \frac{p}{\hat{\omega}} \left( \partial_k (\partial_{ji} \omega_{li}) + \partial_k \omega_{ji} \right. \\ &\quad \left. - \partial_{j\omega_{ik}} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots(22)$$

これらの応力は  $v_i, \omega_{ji}$  の 0 次同次式であり、このことは  $\partial_{jv_i}$  や  $\omega_{ji}$  の主軸方向と静圧力  $p$  とが応力を定めていることを意味する。ゆえに応力と変形速度との間に一対一対応がつかず、この意味で流れは剛塑性的である\*。このことはさらに、応力  $\sigma^{ji}, \mu^{kji}$  の成分が互いに代数

\*すなわち速度勾配  $\partial_{jv_i}$ 、回転  $\omega_{ji}$ 、回転勾配  $\partial_k \omega_{ji}$  を一斉に何倍かしても生じる応力は変わらない(0次同次式の定義でもある)。このことは、一定の応力のもとで変形がどんどん進行していけることを意味する。金属塑性論ではこのようなものを剛塑性体または完全塑性体であるという。

的に従属であること、すなわち応力成分が臨界拘束条件を満していなければならないことを意味する。計算の結果。それは次のようになる。(付録2参照)

$$\bar{\sigma}^{ji} \bar{\sigma}^{ji} - (\mu^2/5) \sigma^{kk} \sigma^{ll} + (3/5) \sigma^{(ji)} \sigma^{(ji)} + (1/a^2) (\bar{\mu}^{ji} \bar{\mu}^{ji} + (3/5) \mu^{(ji)} \mu^{(ji)}) = 0 \quad \dots\dots(23)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mu}^{ji} &\equiv \mu^{(ji)} - (1/3) \delta_{ji} \mu^{kk} \\ \mu^{ji} &\equiv (1/2) \epsilon^{ilk} \mu^{jlk} \end{aligned} \right\} \dots\dots(24)$$

ただし  $\epsilon^{kji}$  は Eddington のイプシロンであり、 $(kji)$  の偶順列、奇順列、その他に応じてそれぞれ 1, -1, 0 をとる。特に  $a \rightarrow 0$  の極限では  $\mu^{ji}, \sigma^{(ji)} \rightarrow 0$  となり、(23)式は

$$\bar{\sigma}^{ji} \bar{\sigma}^{ji} = (\mu^2/5) \sigma^{kk} \sigma^{ll} \quad \dots\dots(25)$$

となる。これは“拡張 von Mises 則”とよばれるものであるが、これは降伏条件(破壊規準)ではないので、“Mohr-Coulomb 則”である必要はない。しかし、特に平面運動の場合は Mohr-Coulomb 則に一致する。運動面内の主応力を  $\sigma_1, \sigma_2$  とし、Fig. 3 のように内部まさつ角を  $\phi$  とすれば(25)式は次のようにも表わせる。

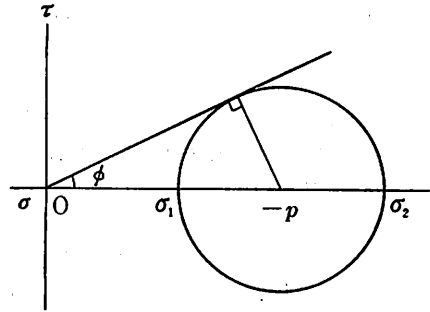


Fig. 3 Mohr の応力円

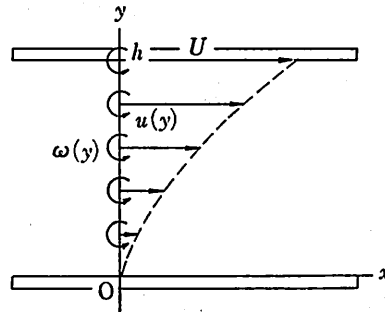


Fig. 4 平行平板間の流れ

$$\sin \phi = \frac{3\sqrt{10}}{10} \mu \quad \dots\dots(26)$$

### 5. 平行平板間の流れと境界層

Fig. 4のような平行平板間の流れ、いわゆる Couette 流を考えよう。重力は考えず、 $y=0$  では速度も回転速度も 0 とし、 $y=h$  で速度は  $U$ 、偶応力は 0 とする。流れが定常であれば運動方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} 4(u'/\omega)' + 5(\omega/\hat{\omega})' &= 0 \\ 4a^2(\omega'/\hat{\omega})' - 5u'/\hat{\omega} - 10\omega/\hat{\omega} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(27)$$

ただし、 $'=d/dy$  であり  $\hat{\omega}$  は次のように与えられる。

$$\hat{\omega} = \sqrt{(3/20)(u')^2 + (u'/2 + \omega)^2 + (2a^2/5)(\omega')^2} \quad \dots\dots(28)$$

境界条件は  $y=0$  で  $u=0, \omega=0$ 、 $y=h$  で  $u=U, \omega'=0$  である。しかし、(27)式は非線形であり、厳密解を得るのは困難である。そこで第一近似として  $\hat{\omega}=\text{const.}$  と仮定してみる。このとき解は次のように定まる。

$$\left. \begin{aligned} u/U &= [\sinh \lambda \zeta - 8\lambda \zeta/5 + \tanh \lambda (1 - \cosh \lambda \zeta)] / (\tanh \lambda - 8\lambda/5) \\ (h/U)\omega &= (4\lambda/5)(1 - \cosh \lambda + \tanh \lambda \sinh \lambda \zeta) / (\tanh \lambda - 8\lambda/5) \end{aligned} \right\} \dots\dots(29)$$

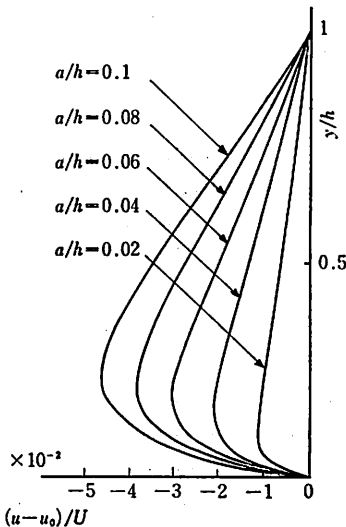


Fig. 5 速度分布の変化

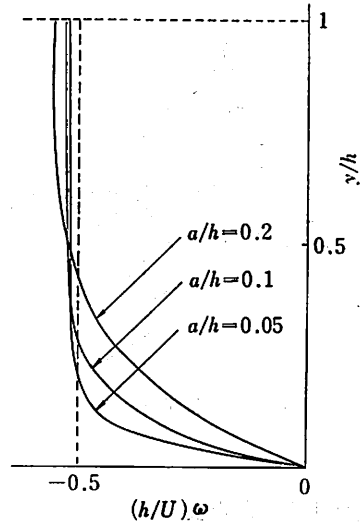


Fig. 6 回転速度分布

ただし、 $\zeta=y/h$ 、 $\lambda=(\sqrt{15}/4)/(a/h)$  である。 $a \rightarrow 0$  の極限では解は、 $y=0$  付近を除いて、単純剪断流

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= Uy/h \\ \omega_0 &= -U/2h \end{aligned} \right\} \dots\dots(30)$$

に収束する。これは方程式(27)の厳密解であるが  $y=0$  での境界条件と適合しない。これは  $y=0$  付近に“境界層”が生じるためである。Fig. 5, Fig. 6 はそれぞれ  $(u-u_0)/U, (h/U)\omega$  をプロットしたものである。これからも、境界で拘束された回転が偶応力を生じ、その影響で  $y=0$  付近に“境界層”が発生することがわかる。その厚さは  $a/h \rightarrow 0$  につれて小さくなる。これらのことは、方程式(27)が  $a \rightarrow 0$  としたとき、特異摂動\*の形をしていることによる<sup>24)</sup>。このように、偶応力の効果が近距離にしか及ばないことは、弾性体の偶応力理論でもよく知られている

\* 微分方程式の最高階数の導関数の係数に微小量を表わすパラメータ  $\epsilon$  が含まれ、 $\epsilon=0$  とするとその導関数の項が 0 となるものを特異摂動という。たとえば  $\epsilon y''' + y'' - 1 = 0$  で  $\epsilon$  が微小なら、この方程式は三階微分方程式で、三階微分の項に  $\epsilon$  がかかっているから特異摂動である。 $\epsilon=0$  とすると二階の微分方程式となる。一般に  $N$  階微分方程式の一般解は  $N$  個の積分定数を含んでいるので  $N$  個の境界条件が必要である。これが特異摂動であって、 $\epsilon=0$  とすれば微分の階数がさがり、境界条件が余分になってしまう。 $\epsilon \neq 0$  では、近似的にはその余分の境界条件は満たされていないように見えるが、詳細に調べれば、境界付近で解が急激に変化して、微視的にはその境界条件が満たされているということになる。すなわち、境界条件の効果が境界付近の近距離にしか及ばないのである。

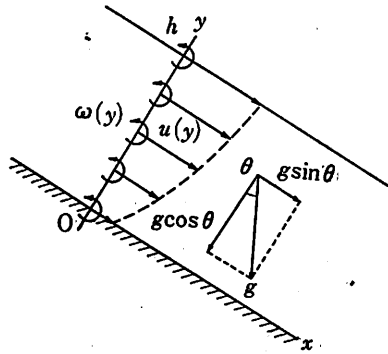


Fig. 7 斜面上の流れ

ことである<sup>25)</sup>。

### 6. 斜面上の流れと安息角

Fig. 7のような斜面上の流れを考えよう。境界条件は  $y=0$  で  $u=0, \omega=0$ ,  $y=h$  で自由表面とする。このとき  $y$  方向の運動方程式は直ちに積分できて

$$p = \rho g(h-y) \cos \theta \quad \dots\dots(31)$$

となる。しかし、残りの方程式はやはり解析が困難である。そこで、変分問題に直してみよう。流れが定常とすれば、このような一次元流れでは慣性項が0となるので、次のような変分問題が厳密に成立する。

$$\Psi[u, \omega] = \int_0^h [\sqrt{6}\rho g(h-y) \hat{\omega} \cos \theta - \rho g u \sin \theta] dy \rightarrow \text{最小値} \quad \dots\dots(32)$$

ただし  $\hat{\omega}$  は (2) 式で与えられる。ところが、この場合、被積分項が  $u', \omega, \omega'$  に関して一次同次式であるため、きわめて特異な問題となる。仮に  $u, \omega$  が解であるとしよう。  $A$  を任意の正定数とすると、  $Au, A\omega$  も  $u, \omega$  と同じ応力を生じる。これは構成方程式 (2) が  $u', \omega, \omega'$  の0次同次式であることより明らかである。また  $Au, A\omega$  はともに  $y=0$  で0となる。すなわち、  $u, \omega$  が解であれば  $Au, A\omega$  も境界条件を満たす。ところが (2) 式より

$$\Psi[Au, A\omega] = A\Psi[u, \omega] \quad \dots\dots(33)$$

であるので、  $\Psi[u, \omega] \equiv 0$  でなければならない。なぜなら、もしそうでなければ  $A$  を適当に選んで、  $u, \omega$  より  $Au, A\omega$  のほうが  $\Psi$  の値を小さくできることになり、  $u, \omega$  が  $\Psi$  の最小値を与える、すなわち解であるという仮定に反するからである。いま、角  $\theta^*$  を

$$\theta^* = \tan^{-1}(\sqrt{6}\mu \int_0^h (h-y) \omega dy / \int_0^h u dy) \quad \dots\dots(34)$$

で定義すると、  $\Psi \equiv 0$  は  $\theta = \theta^*$  と同値である。もし  $\theta > \theta^*$  であれば  $A$  を大きくして  $\Psi$  を減少させ得るし、もし  $\theta < \theta^*$  なら  $A$  を小さくして  $\Psi$  を減少できる。すなわち、  $\theta > \theta^*$  ならいくらでも速い流れが可能で、  $\theta < \theta^*$  なら、流れは0でなければならない。このことは  $\theta^*$  がいわゆる“安息角”であることを意味する。 $\theta^*$  を確定するためには厳密解を必要とし、これは困難である。そこで  $a \rightarrow 0$  の極限を考えれば、  $\mu^{*j} \rightarrow 0, \sigma^{*j} \rightarrow 0$  となり、構成方程式は次のようになる。

$$\sigma^{*z} = p \tan \theta^* \quad \dots\dots(35)$$

ただし次のように置いた。

$$\tan \theta^* = \frac{3\sqrt{10}}{10} \mu \quad \dots\dots(36)$$

このとき運動方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g \cos \theta (\tan \theta - \tan \theta^*) \quad \dots\dots(37)$$

となり、  $\theta > \theta^*$  なら加速、  $\theta < \theta^*$  なら減衰することが再びわかる。 $\theta = \theta^*$  のときは極限操作の結果、解が不定となっている。(36) と (2) 式とを比較すれば

$$\theta^* < \phi \quad \dots\dots(38)$$

であることがわかる。たとえば  $\mu = 0.7$  とすれば  $\theta^* = 33.6^\circ, \phi = 41.6^\circ$  となる。

### 7. まとめ

本報告において、微視的な粒子間相互作用を考慮し、極性流体の理論により連続場の方程式を導いた。また、変分問題としての定式化も行なった。そして、流れの臨界条件、偶応力の影響、安息角の意味、などの粒状体の基本特性の考察を行なった。

本理論は粒状体内部の微視的構造に忠実であろうと努めたため、数学的にはかなり複雑となり、直ちにすべての流れに応用できるとはいえないが、まえがきでも述べたように、具体的な問題に取り組む際、粒状体の基本特性に反するような仮定をしないための指針となりうると考えている。今後、さらに本理論による応用を進展させる予定である。特に粒子間の衝突、粘着力、粒子の弾性ひずみ、空気との作用を考慮する必要がある。粒子間の

衝突を考えたものは既に報告しているが<sup>(1)</sup>、衝突により流れの表面付近で体積膨張が生じ、流れが加速されることがわかる。これも具体例に則して今後報告したい。また粘着力を導入することは本理論にそれほど変更を与えないことがわかっている。結果は(2)式の  $p$  を  $p+k$  で置きかえればよい。ここに  $k$  は粘着力の大きさを示す定数である。すなわち、みかけ上、圧力が増加していると考えればよい。弾性ひずみを考慮すれば、衝撃に対する復元力が発生するので、流れの中での波動の伝播が可能となる。これらのことも機会を改めて報告したい。一方、空気との作用が存在すると、マグナス力なども発生するので、粒子間の相互作用よりも、粒子と空気との作用が大きな役割を果たすことになる。本理論は粒子間相互作用をもとにした連続理論であるから、空気作用のある場合は本理論の発展としてはとらえにくく、新たな観点より研究する必要があると思われる。

終わりに、本研究を行なうにあたってご指導いただいた東京大学工学部計数工学科の大島信徳教授、および、ご指摘をいただいた同産業機械工学科の長尾高明助教授に深く感謝したいと思います。

付録 1 (2)式より

$$\begin{aligned} \Phi &= \sqrt{6} \mu p \hat{\omega} = \frac{\sqrt{6} \mu p}{\hat{\omega}} \hat{\omega}^2 \\ &= \frac{\sqrt{6} \mu p}{\hat{\omega}} \left\{ \frac{3}{10} E_{ji} E_{ji} + \frac{1}{2} R_{ji} R_{ji} \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^2}{10} (\Omega_{kkj} \Omega_{llj} + \Omega_{kji} \Omega_{kji} + \Omega_{kji} \Omega_{jki}) \right\} \\ &= \left( \frac{3\sqrt{6} \mu}{10} \frac{p}{\hat{\omega}} E_{ji} \right) E_{ji} + \left( \frac{\sqrt{6} \mu}{2} \frac{p}{\hat{\omega}} R_{ji} \right) R_{ji} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sqrt{6} \mu a^2}{5} \frac{p}{\hat{\omega}} (\delta_{k(j} \Omega_{l|l|i)} + \Omega_{kji} - \Omega_{(ji)k}) \right\} \Omega_{kji} \end{aligned} \quad \dots\dots(1.1)$$

これと(4)式とを比較すれば

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{ji} &= \frac{3\sqrt{6} \mu}{10} \frac{p}{\hat{\omega}} E_{ji} \\ \sigma^{(ji)} &= \frac{\sqrt{6} \mu}{2} \frac{p}{\hat{\omega}} R_{ji} \\ \mu^{kji} &= \frac{\sqrt{6} \mu a^2}{5} \frac{p}{\hat{\omega}} (\delta_{k(j} \Omega_{l|l|i)} + \Omega_{kji} - \Omega_{(ji)k}) \end{aligned} \quad \dots\dots(1.2)$$

を得る。(4)式を用いて  $E_{ji}, R_{ji}, \Omega_{kji}$  を  $v^i, \omega_{ji}$  で表わしたものが(2)式である。この結果は(4)式を用いたことにはかならない。

付録 2

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{kl} &\equiv \frac{1}{2} \epsilon_{lji} \Omega_{kji} \\ \bar{\Omega}_{kl} &\equiv \Omega_{(kl)} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \Omega_{mm} \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.1)$$

とおくと

$$\Omega_{kji} = \epsilon_{lji} (\bar{\Omega}_{kl} + \frac{1}{3} \delta_{kl} \Omega_{mm} + \Omega_{(kl)}) \quad \dots\dots(2.2)$$

となる。これを(4)式へ代入すると

$$\begin{aligned} \hat{\omega} &= \sqrt{\frac{3}{10} E_{ji} E_{ji} + \frac{1}{2} R_{ji} R_{ji} + \frac{a^2}{10} (3\bar{\Omega}_{ji} \bar{\Omega}_{ji} \\ &\quad + 5\Omega_{(ji)} \Omega_{(ji)})} \end{aligned} \quad \dots\dots(2.3)$$

となる。また(2)式は

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}^{ji} &= \frac{3\sqrt{6} \mu}{10} \frac{p}{\hat{\omega}} E_{ji} \\ \sigma^{(ji)} &= \frac{\sqrt{6} \mu}{2} \frac{p}{\hat{\omega}} R_{ji} \\ \bar{\mu}^{ji} &= \frac{3\sqrt{6} \mu a^2}{10} \frac{p}{\hat{\omega}} \Omega_{ji} \\ \mu^{(ji)} &= \frac{\sqrt{6} \mu a^2}{2} \frac{p}{\hat{\omega}} \Omega_{(ji)} \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.4)$$

となる。これらを逆に解いて

$$\left. \begin{aligned} E_{ji} &= \frac{10}{3\sqrt{6} \mu} \frac{\hat{\omega}}{p} \bar{\sigma}^{ji} \\ R_{ji} &= \frac{2}{\sqrt{6} \mu} \frac{\hat{\omega}}{p} \sigma^{(ji)} \\ \bar{\Omega}_{ji} &= \frac{10}{3\sqrt{6} \mu a^2} \frac{\hat{\omega}}{p} \bar{\mu}^{ji} \\ \Omega_{(ji)} &= \frac{2}{\sqrt{6} \mu a^2} \frac{\hat{\omega}}{p} \mu^{(ji)} \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.5)$$

これを(2.3)式の両辺を二乗したものに代入すると

$$\begin{aligned} \hat{\omega}^2 &= \frac{\hat{\omega}^2}{\mu^2 p^2} \left( \frac{5}{9} \bar{\sigma}^{ji} \bar{\sigma}^{ji} + \frac{1}{3} \sigma^{(ji)} \sigma^{(ji)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{9a^2} \bar{\mu}^{ji} \bar{\mu}^{ji} + \frac{1}{3a^2} \mu^{(ji)} \mu^{(ji)} \right) \end{aligned} \quad \dots\dots(2.6)$$

両辺から  $\hat{\omega}^2$  を除いて整理したものが(2)式である。

## 引用文献

- 1) 佐武正雄編：日米粒状体セミナープロシーディングス (1978)
- 2) Goodman, M.A. and S.C. Cowin: *J. Fluid Mech.*, **45**, 321 (1971)
- 3) Goodman, M.A. and S.C. Cowin: *Arch. Rational Mech. Anal.*, **44**, 249 (1972)
- 4) Cowin, S.C.: *Powder Technol.*, **9**, 61 (1974)
- 5) Truesdel, C. and R. Noll: "The Non-linear Field Theories of Mechanics", *Handbuch der Physik* III/3, Springer-Verlag (1965)
- 6) Oshima, N.: *RAAG Memoirs*, **1**, 563 (1955)
- 7) 大島信徳：材料科学, **9**, 294 (1972)
- 8) Eringen, A.C.: *Int. J. Eng.*, **2**, 205 (1964)
- 9) Eringen, A.C. 編: "Continuum Physics IV" Academic Press (1976)
- 10) 金谷健一：日本機械学会論文集, **45-392**, B, 507 (1979)
- 11) 金谷健一：日本機械学会論文集, **45-392**, 515 (1979)
- 12) 高橋浩一郎：気象集誌, **2-14**, 566 (1936)
- 13) 林輝夫, ほか：応用物理, **6**, 507 (1937)
- 14) 大山義年：理研彙報, **19**, 1052 (1940)
- 15) 庄可英信：農業機械学会誌, **11**, 134 (1947)
- 16) 栗原弘三, 久野洋：応用物理, **34**, 727 (1965)
- 17) Suzuki, A. and T. Tanaka: *Ind. Eng. Chem. Foundam.*, **10**, 84 (1971)
- 18) 小野英二：応用物理, **36**, 347 (1967)
- 19) Savage, S.C.: *J. Fluid Mech.* 予定
- 20) Bagnold, R.A.: *Proc. Roy. Soc.*, **A225**, 49 (1954); **A295**, 219 (1966)
- 21) 長尾高明：日本機械学会論文集, **43**, 4038 (1977); **44**, 1912 (1978); 文献10)の著者との討論
- 22) 棚橋隆彦：“基礎流体工学入門”コロナ社 (1976)
- 23) 鷺津久一郎, ほか訳：“重みつき残差法と変分原理”培風館 (1974)
- 24) Van Dyke, M.: "Perturbation Methods in Fluid Mechanics" Academic Press (1964)
- 25) Mindlin, R.D. and H.F. Tiersten: *Arch. Rational Mech. Anal.*, **11**, 415 (1962)

## Author's Abstract

### A Study of Flow Characteristics of Granular Materials

by

Ken-ichi KANATANI

(Department of Computer Science, Gunma University)

Continuum mechanical foundation for the flow of granular materials is established. The material is assumed to consist of cohesionless rigid spheres of uniform size and weight. Macroscopic laws are deduced from microscopic considerations of interparticle friction by means of statistical inference. The field is described by the theory of polar fluids. Various characteristics of granular materials such as the critical stress condition and the angle of repose are mathematically deduced from the theory. The effects of couple-stress in the Couette flow between two parallel plates is also studied and the 'boundary layer' is shown to exist.

#### List of Figures

Fig. 1 Two rotating particles in contact.

Fig. 2 The contact forces and the macroscopically equivalent pressure.

Fig. 3 Mohr's stress circle.

Fig. 4 Couette flow between two parallel plates.

Fig. 5 Perturbed profile for the Couette flow.

Fig. 6 Rotation velocity profile for the Couette flow.

Fig. 7 Inclined gravity flow.