

# 研究報告

## ステレオロジーにより粒径分布を求める数値解法の研究

Study of Numerical Schemes for Stereological Estimation of Particle Size Distribution

金谷 健一\* 石川 修\*  
Ken-ichi KANATANI Osamu ISHIKAWA

### 1. はじめに

空間中に分布する粒子の粒径分布を、その空間を切った断面上に現われる粒子の切り口の大きさの分布から逆算することは「積分幾何学」、「ステレオロジー」などと呼ばれる分野の重要な問題のひとつである<sup>1-5)</sup>。特に球状粒子の場合がよく研究されている。これは生物学、医学において重要な問題であるが<sup>6,7)</sup>、金属結晶中の析出物の大きさの分布を顕微鏡写真から求める問題として金属学でも重要である<sup>8,9)</sup>。同じことが複合材料の製品検査にもあてはまる。また粉体工学においても粒径分布をこの方法で求めることが試みられている<sup>10)</sup>。

ところで、球状粒子の場合の公式は別の場合にも応用できる。たとえば、平面に分布している円をランダムに引いた線によって切り、その切り口の長さの分布から円の半径分布を求めるための公式は球状粒子の場合と等しくなる。この関係を用いると、ディスプレイ上に映し出された円の半径分布を平行な走査線によって測定できることになる。また、空間中に円盤の分布している場合も同じ公式になる。この場合には、円盤の半径分布と平面で切られた円盤の長さとの関係は球状粒子の場合と定数を除いて同じである。これを用いると、金属や岩盤の内部のクラックを円盤で近似して、その大きさの分布を切断面上の切り口の長さの分布から求めることができる<sup>11)</sup>。

一方、球状粒子ではなく、線状粒子や板状粒子のような異方性粒子の場合や曲線や曲面からなる内部組織をもつ場合の巨視的異方性を測定する方法は、考え方としては古く Buffon<sup>12)</sup> にさかのぼり、具体的手法としては Hilliard<sup>13)</sup> により提案され、金谷<sup>14)</sup> により Buffon 変換として一般化され、粉体工学や<sup>15)</sup> 材料科学に<sup>16)</sup>、またコンピュータによる画像認識<sup>17,18)</sup> に応用されている。

ここでは球状粒子の粒径分布を推定する種々の公式を体系的に分類し、その誤差の理論的評価を行なった著者らの研究<sup>19)</sup>を報告する。従来から種々の計算法がいろいろな分野において独立して提案されてきたが<sup>20-28)</sup>、誤差を系統的に解析したものはなかった。これまで提案されたものはすべて、適当に変形すれば本報告中の定式化の枠内に納まることがわかる。

### 2. 基礎方程式と離散近似

種々の大きさの球が空間中に分布しているとし、 $F(R)$  を半径の分布密度とする。すなわち、単位体積当りに存在する半径  $R$  から  $R+dR$  の球の数が  $F(R)dR$  であるように  $F(R)$  を定義する。その空間を平面で切ると、平面で切られた球の切り口は円となる。その円の半径の分布密度を  $f(r)$  とする。すなわち、断面の単位面積当りに存在する半径  $r$  から  $r+dr$  の円の数が  $f(r)dr$  であるように  $f(r)$  を定義する。球は空間的に一様に分布しているとし、これを切る面は無限に広がっているとす。さて、半径が  $R$  から  $R+dR$  の球が平面で切られる確率は球の中心が平面から  $R$  以内にある確率に等しく、そのような球は定義より単位体積当りに  $F(R)dR$  個あるから、その確率はその平面の単位面積当り  $2RF(R)dR$  と

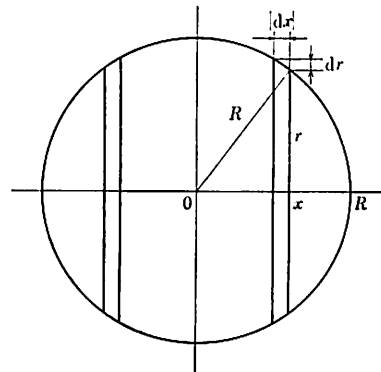


Fig. 1 球を切断する位置と切り口の半径との関係

昭和58年5月11日受付

\*群馬大学工学部情報工学科 (〒376 桐生市天神町 1-5-1)

TEL 0277-22-3181

なる。一方、その面で切られた半径  $R$  の球が半径  $r$  から  $r+dr$  の円の切り口を生じる確率は、Fig. 1 からわかるように

$$|2dx|/2R = |d(\sqrt{R^2 - r^2})|/R = r dr / R \sqrt{R^2 - r^2}$$

である。これに切られる確率  $2RF(R)dR$  をかけて、すべての可能な  $R$  で積分すれば次式を得る<sup>1-3)</sup>。

$$f(r) = 2r \int_r^{R_{\max}} \frac{F(R)dR}{\sqrt{R^2 - r^2}} \quad \dots\dots(2.1)$$

ここで  $R_{\max}$  は半径の最大値である。この結果は、分布は空間的に一様であり、これを切る面は無限と仮定し、「大数の法則」を用いている。しかし断面を有限としても、いろいろの断面について平均を取れば同じことになる。

以上の結果によく注意すれば、平面上に分布している円をランダムに引いた直線で切る場合も同じ公式になることがわかる。この場合  $F(R)$  は単位面積当りに存在する円の半径の分布密度を表わし  $f(r)$  は直線の単位長さ当りの切り口の長さの半分（「半径」）の分布密度を表わしている。また空間中に分布している円盤をランダムに置いた平面で切る場合も定数倍を除いて同じになることがわかる（付録1）。

一方、計算機を用いて実際に計算するためには式(2.1)の積分を総和で置き換えなければならない。この近似の仕方により、いろいろの計算方法が考えられる。どの場合でも区間  $[0, R_{\max}]$  を  $n$  個の小区間に分割して、積分を  $n$  個の値の和で近似する。どの近似も  $n$  が無限大に近づくにつれて真の積分に収束しなければならない。精度の良い結果を得ようとすれば大きな  $n$  をとらなければならないが、実際には断面上のデータは有限個しか得られない。さらに、 $f(r)$  を得るにはヒストグラムを作らなければならない。そのとき、分類の区間の幅が狭すぎると、ばらつきが大きくなってしまし、ある程度より大きい  $n$  をとることも実際上はできない。

これを避けるには分布密度  $f(r)$  ではなく、単位面積当りにある半径  $r$  以下の切り口の個数を表わした累積分布関数  $\phi(r)$  を用いればよい。データの個数を  $M$  とすれば  $\phi(r)$  は  $M$  個の点で不連続な階段関数であり、ヒストグラムの幅を考える必要がない。 $\phi(r)$  は区分的になめらか（正確には区分的に定数）であるから積分は問題ない。さらに種々の平滑化（デジタルフィルタなど）を用いることによってなめらかな真の分布関数を推定することもできる。したがって、以下では半径の分布関数  $\phi(r)$  はなめらかな関数として正確に得られているとする。同様に分布密度  $F(R)$  のかわりに、単位体積当りにある半径が  $R$  以下の球の個数を表す累積分布関数  $\Phi(R)$

を用いることにする。式(2.1)を積分すれば

$$\phi(r) = 2\bar{N} - 2 \int_r^{R_{\max}} \sqrt{R^2 - r^2} F(R) dR \quad \dots\dots(2.2)$$

となる。ただし  $\bar{N}$  は単位体積当りの球の個数であり、 $\bar{R}$  は半径の平均であり、それぞれ次式で表わされる。

$$\bar{N} = \int_0^{R_{\max}} F(R) dR \quad \dots\dots(2.3)$$

$$\bar{R} = \frac{1}{\bar{N}} \int_0^{R_{\max}} R F(R) dR \quad \dots\dots(2.4)$$

式(2.2)を部分積分すれば  $\phi(r)$  と  $\Phi(R)$  との関係に変換できて次のようになる。

$$\phi(r) = 2N(\bar{R} - \sqrt{R_{\max}^2 - r^2}) + 2 \int_r^{R_{\max}} \frac{R\Phi(R)dR}{\sqrt{R^2 - r^2}} \quad \dots\dots(2.5)$$

ここで数値解法として2通りが考えられる。ひとつは式(2.5)の積分を離散化して、連立一次方程式の形に改め、それを数値的に解く方法であり、最終的に

$$\phi(a_i) = \sum_{j=1}^n A_{ij} \phi(a_j) \quad \dots\dots(2.6)$$

の形になる。ただし  $a_i$  はあらかじめ定めた分点における半径の値であり、 $A_{ij}$  は定数である。前もって逆行列  $B_{ij}$  を計算しておけば、断面上の半径分布から粒子の半径分布を

$$\Phi(a_i) = \sum_{j=1}^n B_{ij} \phi(a_j) \quad \dots\dots(2.7)$$

の形で計算できる。もうひとつは、式(2.5)をまず解析的に解いて、 $\Phi(R)$  を  $\phi(r)$  で表わしておき、それを近似する式(2.7)の形を直接計算する方法である。前者を「陰公式」、後者を「陽公式」と呼ぶことにする。

### 3. 陰公式の分類

まず陰公式について考える。区間  $[0, R_{\max}]$  に分点  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = R_{\max}$  をとると式(2.2)は次のようになる。

$$\phi(a_i) = 2N\bar{R} - 2 \sum_{j=i+1}^n \int_{a_{j-1}}^{a_j} \sqrt{R^2 - a_i^2} F(R) dR \quad \dots\dots(3.1)$$

$$i = 0, \dots, n$$

ここで近似

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} \sqrt{R^2 - a_i^2} F(R) dR \sim \sqrt{a_j^2 - a_i^2} \int_{a_{j-1}}^{a_j} F(R) dR = \sqrt{a_j^2 - a_i^2} [\Phi(a_j) - \Phi(a_{j-1})] \quad \dots\dots(3.2)$$

を用いると

$$\phi(a_i) = 2N\bar{R} + 2 \sum_{j=i}^n (\sqrt{a_{j+1}^2 - a_i^2} - \sqrt{a_j^2 - a_i^2}) \Phi(a_j) \quad \dots\dots(3.3)$$

を得る。ただし、以下、根号の中が負になつたり定義さ

れないときはその根号全体を0とみなし、また  $\sum_{j=n}^{n+1}$  のように意味を持たないものも0とみなすと約束することにする。式(3.3)は Scheil<sup>20)</sup>, Schwartz<sup>21)</sup>, Saltykov<sup>22)</sup>らによって与えられた方法と本質的に差がない。これをヒストグラムの高さで表わすために

$$f_i = \phi(a_i) - \phi(a_{i-1}), F_j = \Phi(a_j) - \Phi(a_{j-1})$$

とおいて書き直せば

$$f_i = 2 \sum_{j=0}^n (\sqrt{a_j^2 - a_{i-1}^2} - \sqrt{a_j^2 - a_i^2}) F_j, \quad i=1, \dots, n \quad \dots\dots(3.4)$$

となる。これが従来よく紹介されてきた公式である。しかし、すでに述べたように計算機を使用するとすればヒストグラムを作る必要はないし、式(3.3)の方が扱いやすい。これを式(2.6)の形に直すには、 $\phi(a_0)=0$ より得られる

$$2N\bar{R} = -2 \sum_{j=1}^n (\sqrt{a_{j+1}^2} - \sqrt{a_j^2}) \phi(a_j)$$

の関係を代入すればよい。これを方法1と呼ぶことにしよう。係数行列  $A_{ij}$  は次のようになる。

方法1

$$A_{ij} = \begin{cases} 2[-(a_{j+1} - a_j) + \sqrt{a_{j+1}^2 - a_i^2} - \sqrt{a_j^2 - a_i^2}] & j < n \\ 2[a_n - \sqrt{a_n^2 - a_i^2}] & j = n \end{cases} \quad \dots\dots(3.5)$$

ところで、式(3.2)は根号の値を区間  $[a_{j-1}, a_j]$  の右端の点で近似したものであるが、右端ではなく両端での値の平均をとればさらに精度が得られるはずである。すなわち、

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} \sqrt{R^2 - a_i^2} F(R) dR \sim \frac{1}{2} (\sqrt{a_{j-1}^2 - a_i^2} + \sqrt{a_j^2 - a_i^2}) \int_{a_{j-1}}^{a_j} F(R) dR \quad \dots\dots(3.6)$$

なる近似を用い、 $\phi(a_0)=0$ より  $2N\bar{R}$ を決める。これを方法2と呼ぼう。

方法2

$$A_{ij} = \begin{cases} -(a_{j+1} - a_{j-1}) + \sqrt{a_{j+1}^2 - a_i^2} - \sqrt{a_{j-1}^2 - a_i^2} & j < n \\ a_n + a_{n-1} - \sqrt{a_{n-1}^2 - a_i^2} - \sqrt{a_n^2 - a_i^2} & j = n \end{cases} \quad \dots\dots(3.7)$$

さらに、両端での値の平均値を使用するかわりに、区間の midpoint での値によって近似して、

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} \sqrt{R^2 - a_i^2} F(R) dR \sim \sqrt{a_{j-1/2}^2 - a_i^2} \int_{a_{j-1}}^{a_j} F(R) dR \quad \dots\dots(3.8)$$

としてもよい。ただし  $a_{j-1/2} = (a_{j-1} + a_j)/2$  とおいた。これは Wickell<sup>23)</sup>, Goldsmith<sup>24)</sup>らが用いたものに相当している。同様にして  $\phi(a_0)=0$ より  $2N\bar{R}$ を決めれば係数行列は次のようになる。

方法3

$$A_{ij} = \begin{cases} 2[-(a_{j+1/2} - a_{j-1/2}) + \sqrt{a_{j+1/2}^2 - a_i^2} - \sqrt{a_{j-1/2}^2 - a_i^2}] & j < n \\ 2[a_{n-1/2} - \sqrt{a_{n-1/2}^2 - a_i^2}] & j = n \end{cases} \quad \dots\dots(3.9)$$

以上に述べた方法は各区間内において  $\sqrt{R^2 - a_i^2}$ を定数で近似したものであるが、それらは  $R=a_i$ に特異点を持ち、導関数はそこで無限大となる。したがって以上の方法はあまり良い近似とはいえない。他方、分布密度  $F(R)$ のほうはなめらかな曲線と仮定しているから、 $\sqrt{R^2 - a_i^2}$ ではなく  $F(R)$ を各区間で定数に置き換え、積分を解析的に実行すれば、より精度の高い近似が得られるはずである。これは分布関数  $\Phi(R)$ を区分的に一次関数と見なすことにほかならない。 $\Phi(R)$ が区間  $[a_{j-1}, a_j]$ において一次関数で近似できるとすると、

$$F(R) = d\Phi(R)/dR \sim [\Phi(a_j) - \Phi(a_{j-1})]/h_{j-1}$$

となり

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} \sqrt{R^2 - a_i^2} F(R) dR \sim \frac{1}{h_{j-1}} [\Phi(a_j) - \Phi(a_{j-1})] \int_{a_{j-1}}^{a_j} \sqrt{R^2 - a_i^2} dR \quad \dots\dots(3.10)$$

ただし、 $h_j = a_{j+1} - a_j$ とおいた。これは Bach<sup>25)</sup>, Cruz-Orive<sup>26)</sup>らが用いたものに相当している。再び  $\phi(a_0)=0$ より  $2N\bar{R}$ を決めれば次の方法となる。

方法4

$$A_{ij} = \begin{cases} -(a_{j+1} - a_{j-1}) & j < i \leq n \\ -(a_{i+1} - a_{i-1}) + \frac{1}{h_i} (\rho_{i,i+1} - \rho_{i,i}) & i = j < n \\ -(a_{j+1} - a_{j-1}) + \frac{1}{h_j} \rho_{i,j+1} - \frac{h_{j-1} + h_j}{h_{j-1} h_j} \rho_{i,j} + \frac{1}{h_{j-1}} \rho_{i,j-1} & i < j < n \\ a_{n-1} + a_n - \frac{1}{h_{n-1}} (\rho_{i,n} - \rho_{i,n-1}) & i < j = n \\ a_{n-1} + a_n & i = j = n \end{cases} \quad \dots\dots(3.11)$$

ただし、次のようにおいた。

$$\rho_{ij} = a_j \sqrt{a_j^2 - a_i^2} - a_i^2 \log(a_j + \sqrt{a_j^2 - a_i^2}) \quad \dots\dots(3.12)$$

#### 4. 陽公式の分類

式(2.1)は簡単な変数変換によって Abel 型積分方程式に変換でき、結局

$$\phi(R) = N - \frac{1}{\pi} \int_R^{R_{\max}} \frac{f(r) dr}{\sqrt{r^2 - R^2}} \quad \dots\dots(4.1)$$

となる(付録2)。ところが、この右辺を  $\phi(r)$  について表わすために部分積分しようとしても、 $r=R$  が特異点となるので、これ以上の積分はできない。再び分点として  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = R_{\max}$  を選べば、次式を得る。

$$\phi(a_i) = N - \frac{1}{\pi} \sum_{j=i+1}^n \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{f(r) dr}{\sqrt{r^2 - a_i^2}} \quad \dots\dots(4.2)$$

式(4.2)の積分の近似の方法として、陰公式同様、種々の方法が可能である。近似として

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{f(r) dr}{\sqrt{r^2 - a_i^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{a_j^2 - a_i^2}} \int_{a_{j-1}}^{a_j} f(r) dr \quad \dots\dots(4.3)$$

が方法1に対応している。前と同様に  $\phi(a_0) = 0$  から  $N$  を決めれば次に示す方法となる。

##### 方法5

$$B_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{a_{j+1}} - \frac{1}{a_j} \right) & j < i \leq n \\ \frac{1}{\pi} \left[ -\left( \frac{1}{a_{i+1}} - \frac{1}{a_i} \right) + \frac{1}{\sqrt{a_{i+1}^2 - a_i^2}} \right] & i = j < n \\ \frac{1}{\pi} \left[ -\left( \frac{1}{a_{j+1}} - \frac{1}{a_j} \right) + \frac{1}{\sqrt{a_{j+1}^2 - a_i^2}} - \frac{1}{\sqrt{a_j^2 - a_i^2}} \right] & i < j < n \\ \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{a_n} - \frac{1}{\sqrt{a_n^2 - a_i^2}} \right] & i < j = n \\ \frac{1}{\pi} \frac{1}{a_n} & i = j = n \end{cases} \quad \dots\dots(4.4)$$

方法2に対応した近似は

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - a_i^2}} \sim \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{a_{j-1}^2 - a_i^2}} + \frac{1}{\sqrt{a_j^2 - a_i^2}} \right)$$

である。しかし、 $1/\sqrt{r^2 - a_i^2}$  は  $r = a_i$  で特異性を持ち、そこで無限大に発散してしまうので、この場合には適当でない。方法3に対応した近似

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{f(r) dr}{\sqrt{r^2 - a_i^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{a_{j-1/2}^2 - a_i^2}} \int_{a_{j-1}}^{a_j} f(r) dr \quad \dots\dots(4.5)$$

を用いて、 $\phi(a_0) = 0$  より  $N$  を決めれば次の方法6となる。

##### 方法6

$$B_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{a_{j+1/2}} - \frac{1}{a_{j-1/2}} \right) & j < i \leq n \\ \frac{1}{\pi} \left[ -\left( \frac{1}{a_{i+1/2}} - \frac{1}{a_{i-1/2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{a_{i+1/2}^2 - a_i^2}} \right] & j = i < n \\ \frac{1}{\pi} \left[ -\left( \frac{1}{a_{j+1/2}} - \frac{1}{a_{j-1/2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{a_{j+1/2}^2 - a_i^2}} - \frac{1}{\sqrt{a_{j-1/2}^2 - a_i^2}} \right] & i < j < n \\ \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{a_{n-1/2}} - \frac{1}{\sqrt{a_{n-1/2}^2 - a_i^2}} \right] & i < j = n \\ \frac{1}{\pi} \frac{1}{a_{n-1/2}} & i = j = n \end{cases} \quad \dots\dots(4.6)$$

方法4に対応するものは分布関数  $\phi(r)$  を区分的に一次関数で近似するものである。区間  $[a_{j-1}, a_j]$  での微分を  $f(r) = d\phi(r)/dr \sim [\phi(a_j) - \phi(a_{j-1})]/h_{j-1}$  で近似すれば

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{f(r) dr}{\sqrt{r^2 - a_i^2}} \sim \frac{1}{h_{j-1}} [\phi(a_j) - \phi(a_{j-1})] \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - a_i^2}} \quad \dots\dots(4.7)$$

となる。これは Anderssen ら<sup>27, 28)</sup> が用いた方法に相当している。 $N$  は  $\phi(a_0) = 0$  から決まる。しかし式(4.7)の右辺の積分は  $j=1, i=0$  のとき収束しない。ところが式(2.1)からわかるように  $r=0$  の近傍で  $f(r) = O(r)$  であるから式(4.7)の左辺は収束する。したがって  $r=0$  の近傍で  $\phi(r)$  を2次関数で近似し

$$\phi(r) \sim \left( \frac{r}{h_0} \right)^2 \phi(a_1) \quad \dots\dots(4.8)$$

とおけば次の方法となる。

##### 方法7

$$B_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left[ \frac{2}{h_0} - \frac{1}{h_1} (\log a_2 - \log a_1) + \frac{1}{h_1} (\rho_{12} - \rho_{11}) \right] & i = j = 1 \\ \frac{1}{\pi} \left[ \frac{2}{h_0} - \frac{1}{h_1} (\log a_2 - \log a_1) \right] & 1 = j < i \\ \frac{1}{\pi} \left[ -\left( \frac{1}{h_j} \log a_{j+1} - \frac{h_{j-1} + h_j}{h_{j-1} h_j} \log a_j + \frac{1}{h_{j-1}} \log a_{j-1} \right) \right] & 1 < j < i \\ \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{1}{h_i} \log a_{i+1} - \frac{h_{i-1} + h_i}{h_{i-1} h_i} \log a_i + \frac{1}{h_{i-1}} \log a_{i-1} + \frac{1}{h_i} (\rho_{i, i+1} - \rho_{ii}) \right] & i = j < n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi} \left[ -\left( \frac{1}{h_j} \log a_{j+1} - \frac{h_{j-1} + h_j}{h_{j-1} h_j} \log a_j \right. \right. \\ \quad \left. \left. + \frac{1}{h_{j-1}} \log a_{j-1} \right) + \frac{1}{h_j} \rho_{t,j+1} \right. \\ \quad \left. - \frac{h_{j-1} + h_j}{h_{j-1} h_j} \rho_{t,j} + \frac{1}{h_{j-1}} \rho_{t,j-1} \right] & i < j < n \\ \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{h_{n-1}} (\log a_n - \log a_{n-1}) \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{h_{n-1}} (\rho_{t,n} - \rho_{t,n-1}) \right] & i < j = n \\ \frac{1}{\pi} \frac{1}{h_{n-1}} (\log a_n - \log a_{n-1}) & i = j = n \end{cases} \quad \dots\dots(4.9)$$

ただし、次のようにおいた。

$$\rho_{t,j} = \log(a_j + \sqrt{a_j^2 - a_{t-1}^2}) \quad \dots\dots(4.10)$$

### 5. 条件数

今まで述べてきた計算方法は

$$\phi = A\theta, \quad \theta = B\phi \quad \dots\dots(5.1)$$

の形で表わされている。ここで  $\phi$  は入力ベクトルであり、 $i$  番目の要素は  $\phi(a_i)$  である。また  $\theta$  は出力ベクトルであり、 $i$  番目の要素は  $\theta(a_i)$  である。そして  $B = A^{-1}$  である。入力ベクトル  $\phi$  は実験結果から得られるもので、必ず観測誤差を含んでいる。したがって出力ベクトル  $\theta$  にもそれに応じた誤差が生じる。ここで問題となるのは、入力に含まれていた誤差がどの程度出力に影響を及ぼすかということである。もし入力に含まれていた誤差が大きく増幅されてしまうなら、すなわち入力に対して非常に敏感なら、結果として得られる値は信頼できないものになる。このことは、行列  $A$  または  $B$  によって決まる「条件数」と呼ばれているものによって評価できる。ベクトル  $x$  の  $L^p$  ノルムを  $\|x\|_p$  とし、これに対する行列  $A$  の随伴ノルムを  $\|A\|_p$  とする。すなわち、

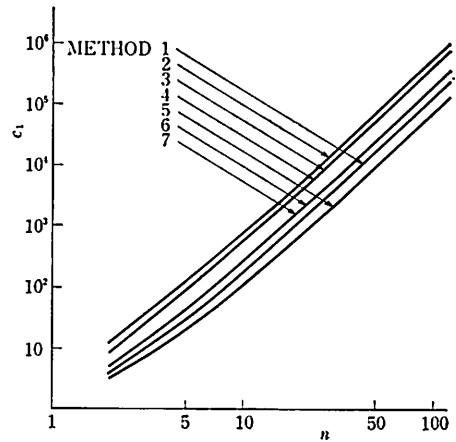
$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \|Ax\|_p / \|x\|_p \quad \dots\dots(5.2)$$

したがって常に  $\|Ax\|_p \leq \|A\|_p \|x\|_p$  が成り立つ。ここでは  $p=1, \infty$  の場合のみ考える。

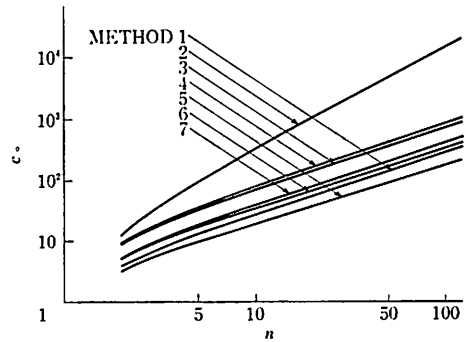
$$p=1 : \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |A_{ij}| \quad \dots\dots(5.3)$$

$$p=\infty : \|x\|_\infty = \max_i |x_i|, \quad \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |A_{ij}| \quad \dots\dots(5.4)$$

$\phi$  を真の入力値とし、それに応じた真の出力値を  $\theta$  とする。さて、 $\phi + \Delta\phi$  を実際に入力値とし、その出力を  $\theta + \Delta\theta$  とすると  $\Delta\theta = B\Delta\phi$  である。よって、 $\|\Delta\theta\|_p \leq \|B\|_p \|\Delta\phi\|_p$  である。一方  $\|\phi\|_p = \|A\theta\|_p \leq \|A\|_p \|\theta\|_p$



(a)  $c_1$



(b)  $c_\infty$

Fig. 2 方法1—7の条件数

であるから、入力と出力の相対的な誤差の関係は

$$\|\Delta\theta\|_p / \|\theta\|_p \leq c_p \|\Delta\phi\|_p / \|\phi\|_p \quad \dots\dots(5.5)$$

で表わされる。ここで、 $c_p$  は条件数と呼ばれ、次式で定義されるものである。

$$c_p = \|A\|_p \|B\|_p \quad \dots\dots(5.6)$$

これより、もし条件数が非常に大きければ測定誤差の影響を受けやすい恐れがある。そのような場合、行列は「悪条件」と呼ばれる。Fig. 2(a), (b)に方法1~7の条件数  $c_1, c_\infty$  を各々図示した。これらの図から条件数はほぼ  $n$  のべき乗に比例していることがわかる。各方法ごとに係数と指数の値はわずかに異なるが、どの方法も入力誤差に対して非常に敏感であり、各方法間の差はほとんど認められない。

### 6. 隠公式の誤差

ここでは各離散近似により生じる誤差を考え、 $n$  が大きい場合の誤差の漸近的な形を導く。区間  $[0, R_{\max}]$  の分割  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = R_{\max}$  は等間隔である必

要はないので、まず分点を増加させる仕方を決めなければならぬ。 $m(R)$  を  $\lim_{n \rightarrow \infty} ([a, b] \text{間の分点数})/n = \int_a^b m(R) dR$  で定義し、「分点密度」と呼ぶことにする。当然、 $\int_0^{R_{\max}} m(R) dR = 1$  である。また、 $m(R)$  が区間  $(0, R_{\max})$  でなめらかな増加関数となる分割のみ考える。さらに、有限の  $n$  に対する分割は次に示すように行なうものとする。

$$h_i = 1/nm(a_i) + O(1/n^2) \quad \dots\dots(6.1)$$

ここで  $h_i = a_{i+1} - a_i$  は  $i$  番目の小区間の長さである。代表的な例を以下に示す。

(I) 半径の等分割

$$a_i = R_{\max}(i/n), \quad m(R) = 1/R_{\max} \quad \dots\dots(6.2)$$

(II) 断面積の等分割

$$a_i = R_{\max} \sqrt{i/n}, \quad m(R) = 2R/R_{\max}^2 \quad \dots\dots(6.3)$$

(III) 体積の等分割

$$a_i = R_{\max} \sqrt[3]{i/n}, \quad m(R) = 3R^2/R_{\max}^3 \quad \dots\dots(6.4)$$

次に「残差」 $\Delta\phi_1(a_i)$ ,  $\Delta\phi_0$ ,  $\Delta\phi(a_i)$  を各々次のように定義する。

$$-2 \int_{a_i}^{R_{\max}} \sqrt{R^2 - a_i^2} F(R) dR = (\text{近似式}) + \Delta\phi_1(a_i) \quad \dots\dots(6.5)$$

$$\bar{2}RN = (\text{近似式}) + \Delta\phi_0 \quad \dots\dots(6.6)$$

$$\phi(a_i) = (\text{近似式}) + \Delta\phi(a_i) \quad \dots\dots(6.7)$$

したがって  $\Delta\phi(a_i) = \Delta\phi_0 + \Delta\phi_1(a_i)$  である。以下それぞれの方法について残差の漸近的評価を求めてみる。

方法 1

$$\Delta\phi_1(a_i) = \frac{1}{n} \int_{a_i}^{a_n} \frac{RF(R)}{\sqrt{R^2 - a_i^2}} \frac{dR}{m(R)} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \quad \dots\dots(6.8)$$

$$\Delta\phi_0 = -\frac{1}{n} \int_{a_0}^{a_n} F(R) \frac{dR}{m(R)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \dots\dots(6.9)$$

$$\Delta\phi(a_i) = \frac{1}{n} \left[ \int_{a_i}^{a_n} \frac{RF(R)}{\sqrt{R^2 - a_i^2}} \frac{dR}{m(R)} - \int_{a_0}^{a_n} F(R) \frac{dR}{m(R)} \right] + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \quad \dots\dots(6.10)$$

これらは、 $\sqrt{R^2 - a_i^2}$  を各小区間  $[a_{j-1}, a_j]$  で  $R = a_j$  において Taylor 展開し、残差の総和を積分で近似することによって得られる。そのとき  $R = a_i$  が特異点となるので特別な注意が必要となる。 $O(1/n\sqrt{n})$  は総和を収束する特異積分で近似したときに生じたものである。

方法 2

$$\Delta\phi_1(a_i) = \frac{C_2 \sqrt{a_i} F(a_i)}{m(a_i)^{3/2} n^{3/2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \dots\dots(6.11)$$

$$\Delta\phi_0 = -\frac{1}{6n^2} \int_{a_0}^{a_n} F'(R) \frac{dR}{m(R)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \dots\dots(6.12)$$

$$\Delta\phi(a_i) = \frac{C_2 \sqrt{a_i} F(a_i)}{m(a_i)^{3/2} n^{3/2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \dots\dots(6.13)$$

ただし、 $C_2$  は定数である。これらの結果は、各小区間  $[a_{j-1}, a_j]$  において Lagrange 補間公式を適用し、残差の総和を計算することにより得られる。この場合は、特異点  $R = a_i$  の近傍での誤差が主要項となり、定数  $C_2$  を正確に定めるのは困難であるが、総和を発散積分におきかえ漸的に評価すれば  $C_2 \sim -5\sqrt{2}/12$  となる。

方法 3

$$\Delta\phi_1(a_i) = \frac{C_3 \sqrt{a_i} F(a_i)}{m(a_i)^{3/2} n^{3/2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \dots\dots(6.14)$$

$$\Delta\phi_0 = -\frac{1}{6n^2} \int_{a_0}^{a_n} F'(R) \frac{dR}{m(R)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \dots\dots(6.15)$$

$$\Delta\phi(a_i) = \frac{C_3 \sqrt{a_i} F(a_i)}{m(a_i)^{3/2} n^{3/2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \dots\dots(6.16)$$

この結果は定数  $C_3$  が異なることを除けば方法 2 と同じであり、各小区間  $[a_{j-1}, a_j]$  で  $R = (a_{j-1} + a_j)/2$  において  $\sqrt{R^2 - a_i^2}$  を Taylor 展開し、残差の総和を計算すれば得られる。ここでも  $R = a_i$  の近傍での誤差が主要項であり、 $C_3$  の近似値を求めれば  $C_3 \sim (48 - 31\sqrt{2})/24$  となる。

方法 4

$$\Delta\phi_1(a_i) = -\frac{1}{6n^2} \int_{a_i}^{a_n} \frac{RF'(R)}{\sqrt{R^2 - a_i^2}} \frac{dR}{m(R)^2} + O\left(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right) \quad \dots\dots(6.17)$$

$$\Delta\phi_0 = \frac{1}{6n^2} \int_{a_0}^{a_n} F'(R) \frac{dR}{m(R)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \dots\dots(6.18)$$

$$\Delta\phi(a_i) = -\frac{1}{6n^2} \left[ \int_{a_i}^{a_n} \frac{RF'(R)}{\sqrt{R^2 - a_i^2}} \frac{dR}{m(R)^2} - \int_{a_0}^{a_n} F'(R) \frac{dR}{m(R)^2} \right] + O\left(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right) \quad \dots\dots(6.19)$$

この方法は  $\phi(R)$  を区分的に一次関数で近似しているのので、誤差項は各小区間  $[a_{j-1}, a_j]$  ごとに (2.5) 式の  $\phi(R)$  に Lagrange 補間公式を適用し、残差の総和を積分で近似すれば得られる。

$\Delta\phi$  を  $i$  番目の要素が  $\Delta\phi(a_i)$  であるようなベクトルとすると、 $\phi = A\Delta\phi$  であるから  $\phi = B\phi - B\Delta\phi$  となる。ゆえに、解  $B\phi$  に含まれている誤差は

$$\Delta\phi(a_i) = -\sum_{j=1}^n B_{ij} \Delta\phi(a_j) \quad \dots\dots(6.20)$$

で与えられる。そして、 $B_{ij} = O(1/n)$  であることより

誤差に関するオーダーは  $\phi(a_i)$  のものと同じであることがわかる。したがって、誤差は方法1では  $O(1/n)$ 、方法2と方法3では  $O(1/n\sqrt{n})$ 、方法4では  $O(1/n^2)$  となる。

### 7. 陽公式の誤差

$\Delta\phi_1(a_i)$ ,  $\Delta\phi_0$ ,  $\Delta\phi(a_i)$  を各々

$$-\frac{1}{\pi} \int_{a_i}^{a_n} \frac{f(r) dr}{\sqrt{r^2 - a_i^2}} = (\text{近似式}) + \Delta\phi_1(a_i) \dots\dots(7.1)$$

$$N = (\text{近似式}) + \Delta\phi_0 \dots\dots(7.2)$$

$$\phi(a_i) = (\text{近似式}) + \Delta\phi(a_i) \dots\dots(7.3)$$

と定義する。ここに  $\Delta\phi(a_i) = \Delta\phi_1(a_i) + \Delta\phi_0$  である。

方法5

$$\Delta\phi_1(a_i) = \frac{C_5 f(a_i)}{\sqrt{a_i} \sqrt{m(a_i)} \sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \dots\dots(7.4)$$

$$\Delta\phi_0 = \frac{1}{2\pi n} \int_{a_0}^{a_n} \frac{f(r)}{r^2} \frac{dr}{m(r)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \dots\dots(7.5)$$

$$\Delta\phi(a_i) = \frac{C_5 f(a_i)}{\sqrt{a_i} \sqrt{m(a_i)} \sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \dots\dots(7.6)$$

これらは、各小区間  $[a_{j-1}, a_j]$  において  $1/\sqrt{r^2 - a_i^2}$  を  $r = a_j$  で Taylor 展開し、残差の総和を計算することにより得られる。ここでも  $r = a_i$  の近傍での誤差が主要項となる。前と同様にして  $C_5$  の近似を求めれば  $C_5 \sim -3\sqrt{2}/4\pi$  となる。

方法6

$$\Delta\phi_1(a_i) = \frac{C_6 f(a_i)}{\sqrt{a_i} \sqrt{m(a_i)} \sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \dots\dots(7.7)$$

$$\Delta\phi_0 = \frac{1}{12\pi n^2} \int_{a_0}^{a_n} \frac{f(r)}{r^3} \frac{dr}{m(r)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \dots\dots(7.8)$$

$$\Delta\phi(a_i) = \frac{C_6 f(a_i)}{\sqrt{a_i} \sqrt{m(a_i)} \sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \dots\dots(7.9)$$

これらは、各小区間  $[a_{j-1}, a_j]$  において  $1/\sqrt{r^2 - a_i^2}$  を  $r = (a_{j-1} + a_j)/2$  で Taylor 展開し、残差の総和をとることにより得られる。この場合も  $r = a_i$  の近傍での誤差が主要項となり、 $C_6$  の近似値を求めれば  $C_6 \sim -(97\sqrt{2} - 96)/96\pi$  となる。

方法7

$$\Delta\phi_1(a_i) = \frac{C_7 f'(a_i)}{\sqrt{a_i} m(a_i)^{3/2} n^{3/2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \dots\dots(7.10)$$

$$\Delta\phi_0 = \frac{C_7 f'(0)}{m(0)n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \dots\dots(7.11)$$

$$\Delta\phi(a_i) = \frac{C_7 f'(a_i)}{\sqrt{a_i} m(a_i)^{3/2} n^{3/2}} + \frac{C_7 f'(0)}{m(0)n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \dots\dots(7.12)$$

これらの結果は、各区間において  $\phi(r)$  に Lagrange 補間公式を適用し、残差の総和を計算することによって得られる。ここでは  $\Delta\phi_1(a_i)$  の主要項は  $r = a_i$  の近傍で

の誤差、 $\Delta\phi_0$  の主要項は  $r=0$  の近傍での誤差となっている。式(7.10)、式(7.11)の第2項はともに  $1/n^2$  のオーダーであるから(7.12)式となる。 $C_7$ ,  $C_7'$ の近似値は各々  $C_7 \sim 5\sqrt{2}/24\pi$ ,  $C_7' \sim -1/12\pi$  である。

さて、以上に得られた結果を比較してみれば、陰公式において誤差のオーダーの大きいことがわかる。これは式(2.2)すなわち、陰公式の積分方程式に比べ、対応した式(4.1)の積分の方が特異性が高いからである。このため、同じ近似式を用いても陽公式の誤差の方が大きくなってしまう。一般的に、陽公式よりも陰公式のほうが誤差に関してはすぐれているといえる。

### 8. 数値実験とまとめ

例として、 $R_{\max}$  は1、単位体積当りの球の個数  $N$  は1とし、次のような分布密度を考える。

$$F(R) = 30R^2(R-1)^2 \dots\dots(8.1)$$

平均半径は1/2であり、分布関数は

$$\phi(R) = R^3(6R^2 - 15R + 10) \dots\dots(8.2)$$

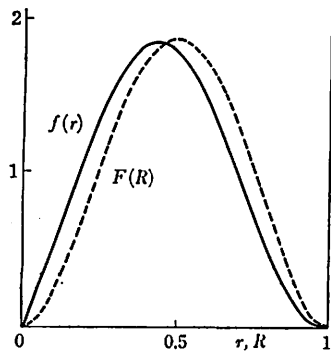
となる。これに対応した断面上の分布関数は式(2.2)より得られ

$$\begin{aligned} \phi(r) = & 1 + 24\sqrt{(1-r^2)^3} + \frac{5}{2}(13r^2 - 10)\sqrt{(1-r^2)^3} \\ & - \frac{15}{4}r^2(r^2 + 2)\left(\sqrt{1-r^2} - r^2 \log \frac{1 + \sqrt{1-r^2}}{r}\right) \end{aligned} \dots\dots(8.3)$$

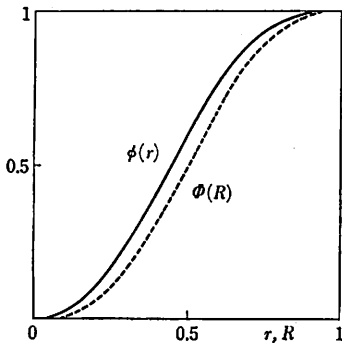
となる。この分布密度は

$$\begin{aligned} f(r) = & -55r\sqrt{(1-r^2)^3} - \frac{15}{2}r(15r^2 - 8)\sqrt{1-r^2} \\ & + \frac{15}{2}r^3(3r^2 + 4)\log \frac{1 + \sqrt{1-r^2}}{r} \end{aligned} \dots\dots(8.4)$$

となる。式(8.1)–(8.4)はFig.3(a), (b)に示してある。式(8.3)を入力値として用いれば、真の出力は式(8.2)で表わされる。簡単のために、分割方法としては半径の等分割、すなわち  $a_i = i/n$  (式(6.2))を用いる。したがって  $m(R) = 1$  である。誤差の大きさとしては、最大値  $\|\Delta\phi\|_{\infty} = \max_i |\Delta\phi(a_i)|$  と平均値  $\|\Delta\phi\|_1/n = \sum_{i=1}^n |\Delta\phi(a_i)|/n$  (式(5.3), (5.4)参照)を用い、それらをFig.4(a), (b)に示した。これからわかるように収束のオーダーは先に求めた漸近的評価によく一致している。Fig.5(a)–(b)は陽公式についての誤差の分布を示したものである。 $n = 30, 60, 120$  について破線でその漸近的評価式の値を、実線で計算値を示した。これらは非常によく一致していることがわかる。方法5の場合に少しずれているのは  $\Delta\phi_0$  (式(7.5))が  $\Delta\phi_1(a_i)$  (式(7.4))に対し無視できない大きさを持つためと考えられる。以上の誤差の漸近的評価から陰公式、特に方法4が高精度

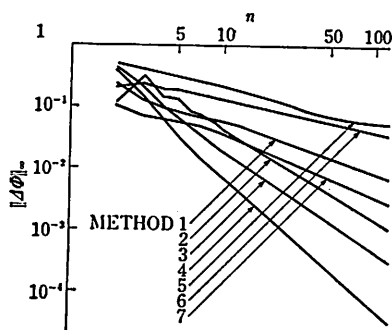


(a) 分布密度

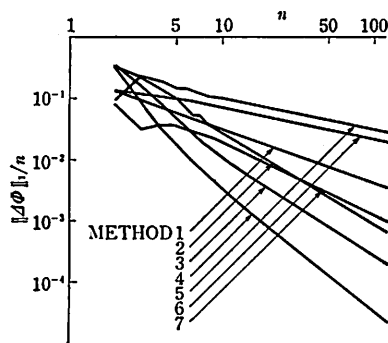


(b) 分布関数

Fig. 3 粒径分布とその切り口の半径分布の例

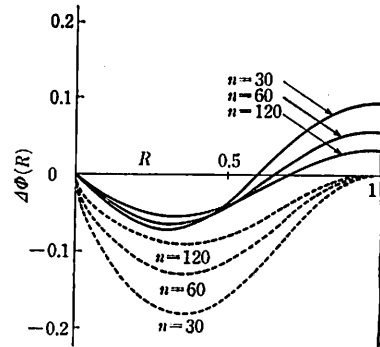


(a)  $\|\Delta\phi\|_1$

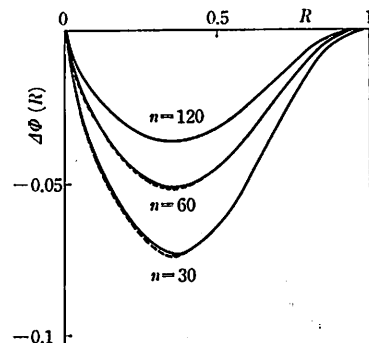


(b)  $\|\Delta\phi\|_1/n$

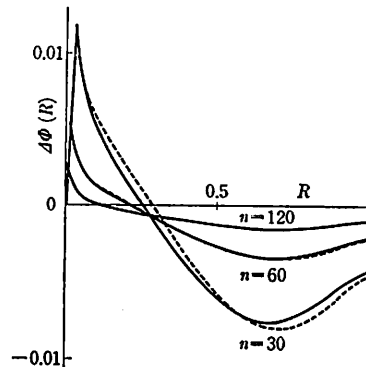
Fig. 4 Fig. 3 の例の方法 1-7 による計算誤差



(a) 方法 5



(b) 方法 6



(c) 方法 7

Fig. 5 誤差の漸近的評価(破線)と実際の誤差の分布(実線)。ただし Fig. 3 の例の  $n=30, 60, 120$  の場合

であり、実際の計算に用いればかなりよい結果が得られることが予想される。しかし、陽公式は逆行列が不要であることや、漸近的な誤差が入力として得られる断面上の分布から推測できるなどの利点がある。これは種々の目的に利用でき、たとえば、予想される誤差の漸近的な値を用いて数値解を修正すること、また Richardson 型の補外、または「加速」を用いて真の解への収束を早めることもできる。なお本研究の一部は実吉奨学会の助成によった。



付録1 円盤とその切り口分布

$F(R)$  を円盤の半径の分布密度とする。すなわち、 $F(R)dR$  が単位体積当りに存在する半径  $R$  から  $R+dR$  の円盤の数を表わすように定義する。円盤の向きは半径分布とは独立にすべての方向に対し一様に分布しているとする。そしてそれらをその空間にランダムに置いた平面で切り、その平面の単位法線を  $m$  とする。次に半径が  $R$  から  $R+dR$  であり、その単位法線が  $n$  方向の微小立体角  $d\Omega(n)$  の中にあるような円盤を考える。(各円盤は法線方向として互いに逆向きの2方向が考えられるが、そのうちの一方をランダムに選ぶとする。) そのような円盤は平面からの距離が  $\|m \times n\|_2 R$  以内にあるとき平面で切られる。(ここで  $\|\cdot\|_2$  は Euclid ノルムを表わす。すなわち、 $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^3 x_i^2}$ ) ゆえに平面で切られる確率は単位面積当り  $2\|m \times n\|_2 R F(R) dR d\Omega(n) / 4\pi$  である。切り口の半分の長さを「半径」と呼ぶことにすると「半径」が  $r$  から  $r+dr$  となる確率は  $r dr / R \sqrt{R^2 - r^2}$  (Fig.1 参照) となる。なぜなら、ある円盤上における可能な切り口の位置はそれに垂直な方向に対して一様に分布しており、円盤の傾きを考える必要がないからである。以上より「半径」が  $r$  から  $r+dr$  である切り口の個数の期待値は単位面積当り  $2\|m \times n\|_2 r F(R) dr dR d\Omega(n) / 4\pi \sqrt{R^2 - r^2}$  となる。これをすべての方向  $n$  と半径  $R$  に対し積分したものが  $f(r) dr$  であるから次の関係を得る。

$$f(r) = \frac{\pi}{2} r \int_r^{R_{\max}} \frac{F(R) dR}{\sqrt{R^2 - r^2}} \quad (A1.1)$$

ただし  $\int \|m \times n\|_2 d\Omega(n) = \pi^2$  の関係<sup>14)</sup>を用いた。

付録2 式(2.1)の反転公式

式(2.1)を  $r, R$  から断面積  $s = \pi r^2, S = \pi R^2$  に変数変換すれば

$$f(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_s^{S_{\max}} \frac{F(S) dS}{\sqrt{S-s}} \quad \dots\dots(A2.1)$$

となる。ただし  $S_{\max} = \pi R_{\max}^2$  とし  $f(s), F(S)$  は各々  $s, S$  に関しての分布密度とする。この両辺に  $1/\sqrt{s-\alpha}$  をかけて区間  $(\alpha, \infty)$  で積分すれば

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{f(s) ds}{\sqrt{s-\alpha}} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{s-\alpha}} \int_s^{S_{\max}} \frac{F(S) dS}{\sqrt{S-s}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha}^{S_{\max}} F(S) dS \int_{\alpha}^S \frac{ds}{\sqrt{s-\alpha}\sqrt{S-s}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha}^{S_{\max}} F(S) dS \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \quad \dots\dots(A2.2) \end{aligned}$$

となる。ここで  $s = (S-\alpha)x + \alpha$  とおいた。一方

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 / \Gamma(1) = \pi \quad \dots\dots(A2.3)$$

である。ここに、 $B(x, y)$  と  $\Gamma(x)$  はそれぞれベータ関数、ガンマ関数である。これを用いれば

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{S_{\max}} \frac{f(s) ds}{\sqrt{s-\alpha}} &= \sqrt{\pi} \int_{\alpha}^{S_{\max}} F(S) dS \\ &= \sqrt{\pi} (N - \Phi(\alpha)) \quad \dots\dots(A2.4) \end{aligned}$$

となり、書き直して

$$\Phi(S) = N - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_S^{S_{\max}} \frac{f(s) ds}{\sqrt{s-S}} \quad \dots\dots(A2.5)$$

となる。ここで変数を  $s, S$  から  $r, R$  に変数変換すれば式(4.1)となる。

引用文献

- 1) Kendall, M. G. and P. A. Moran: "Geometrical Probability", Charles Griffin, London (1963)
- 2) DeHoff, R. T. and F. N. Rhines: "Quantitative Microscopy", McGraw-Hill, New York (1968) (牧島邦夫監訳, "計量形態学", 内田老鶴圃新社(1972))
- 3) Underwood, E. E.: "Quantitative Stereology", Addison-Wesley, Reading, Mass. (1970)
- 4) Santaló, L. A.: "Integral Geometry and Geometric Probability", Addison-Wesley, Reading, Mass. (1976)
- 5) Weibel, E. R.: "Stereological Methods", Vols. 1, 2, Academic Press, New York (1979, 1980)
- 6) 諏訪紀夫: "定量形態学", 岩波書店 (1977)
- 7) Miles, R. E. and J. Serra (eds.): "Geometrical Probability and Biological Structures: Buffon's 200th Anniversary," Springer, Berlin (1978)
- 8) 佐々間健一, 西沢泰二: 日本金属学会会報, 10, 279 (1971)
- 9) 日本金属学会編: "材料検査法" (講座・現代の金属学, 実験技術集7), 日本金属学会 (1978)
- 10) Okaya, T. and T. Inoue: Proc. Int. Symp. Powder Technology, '81, 粉体工学会 (1982) 72~80
- 11) Oda, M.: Mech. Materials, 2, 163 (1983)
- 12) Buffon, G.: Supplement a l'Histoire Naturelle, 4 (1777)
- 13) Hilliard, J. E.: "Stereology—Proc. 2nd Int. Congress for Stereology, Chicago, 1967—", (ed., H. Elias), Springer, Berlin (1967) 219~227
- 14) Kanatani, K.: Int. J. Engng. Sci. 22 (1984)
- 15) 金谷健一: 粉体工学会誌 21-1, 3 (1984)
- 16) 金谷健一: 材料科学 20-4 (1984)
- 17) Kanatani, K.: Artificial Intelligence (to appear)
- 18) Kanatani, K.: Technical Report, CS-83-5, Department of Computer Science, Gunma University (1983)
- 19) Kanatani, K. and O. Ishikawa: Technical Report,

CS-83-4, Department of Computer Science, Gunma University (1983)

20) Scheil, E.: *Z. anorg. allg. Chem.*, 201, 259 (1931)

21) Schwartz, H. A.: *Metals and Alloys*, 5, 139 (1934)

22) Saltykov, S. A.: in "Stereology—Proc. 2nd Int. Congress for Stereology, Chicago, 1967—" (ed.,

H. Elias), Springer, Berlin (1967) 163~173

23) Wicksell, S. D.: *Biometrika*, 17, 84 (1925)

24) Goldsmith, P. L.: *Brit. J. Appl. Phys.*, 18, 813 (1967)

25) Cruz-Orive, L. M.: *J. Microscopy*, 131-3, 265 (1983)

**Authors' Abstract**

**A Study of Numerical Schemes for the Stereological Estimation of Particle Size Distribution**

by

**Ken-ichi KANATANI and Osamu ISHIKAWA**

(Department of Computer Science, Gunma University)

Numerical schemes for estimating the sphere size distribution from the observed size distribution of their cross sections are classified according to the type of approximation. Then, their stability and accuracy are studied in terms of the condition number and the asymptotic evaluation of residues and errors.

**List of Figures**

- Fig.1** The cutting plane and radius of the cross section.
- Fig.2** The condition number of Methods 1—7.
- Fig.3** A size distribution of spheres and their

cross sections.

- Fig.4** The error for the distribution of Fig.3.
- Fig.5** Aysmptotic and actual errors for the distribution in Fig.3.