

# 因子分解法の完全レシピ：完全版

金谷 健一<sup>†</sup> 菅谷 保之<sup>†</sup>

<sup>†</sup> 岡山大学工学部情報工学科

あらまし ビデオ画像上を追跡した特徴点からその 3 次元形状を復元する Tomasi・Kanade の「因子分解法」は“特異値分解によって行列の因子分解を行なう方法”と理解されているが、本論文ではその原理は投影のアフィンカメラモデルによる近似であり、特異値分解は数値計算の一手段に過ぎないことを示す。まず問題の幾何学的な構造を示し、次に「平行投影」、「弱透視投影」、「疑似透視投影」を仮定する 3 次元復元の完全なプログラミング法を記述する。  
キーワード 因子分解法、アフィンカメラモデル、平行投影、弱透視投影、疑似透視投影

## Complete Recipe for Factorization: Supplemented

Kenichi KANATANI<sup>†</sup> and Yasuyuki SUGAYA<sup>†</sup>

<sup>†</sup> Department of Information Technology, Okayama University, Okayama, 700-8530 Japan

**Abstract** The Tomasi-Kanade *factorization* for reconstructing the 3-D shape of the feature points tracked through a video stream is widely regarded as based on factorization of a matrix by SVD (singular value decomposition). This paper points out that the core principle is the approximation of the imaging by an affine camera model and that SVD is merely one means of numerical computation. We first describe the geometric structure of the problem and then give a complete programming scheme for 3-D reconstruction.

**Key words** factorization method, affine camera model, orthographic projection, weak perspective projection, paraperspective projection.

### 1. まえがき

ビデオ画像上で追跡した特徴点からシーンの 3 次元形状を復元する手法として Tomasi・Kanade [14] の因子分解法がよく知られている [1]。これはカメラの撮像をアフィン変換と仮定してカメラ運動とシーンの 3 次元形状を計算するものであり、特徴点の軌跡データから線形計算のみで容易に実行できる。復元結果に高精度を要求しなければ十分実用的であり、また透視投影に基づく厳密な復元の反復計算 [2] の初期値としても用いられる。

しかし、発表以来 10 年以上が経過したにもかかわらず、因子分解法は特異値分解によって行列の因子分解を行なう方法であるという誤解が未だに流布している。この方法の“原理”は投影のアフィンカメラモデルによる近似であり、特異値分解による因子分解の最小二乗解の数値計算の一手段に過ぎない。

このことは以前からさまざまな形で指摘されていたが [4], [7], [15]、本論文ではそれを実証するために因子分解法の具体的なプログラミングの詳細を述べる。

もう一つの理由は、ほとんどの文献に“特異値分解に

よって因子分解する”以上のこと、特にその後の核心となる計量条件の処理と運動と形状の最適化があまり書かれていないことである。本論文の目的は次の 2 点である。

(1) 因子分解法においては特異値分解による因子分解は本質的な意味を持たないことを示す。

(2) 文献に書かれていない、具体的なカメラモデルに応じた 3 次元復元プログラミングの詳細を示す。

### 2. アフィンカメラモデル

$N$  個の特徴点  $\{p_\alpha\}$  を  $M$  枚の画像に渡って追跡し、第  $\kappa$  画像における  $\alpha$  番目の特徴点  $p_\alpha$  の画像座標<sup>(注1)</sup>を  $(x_{\kappa\alpha}, y_{\kappa\alpha})$ ,  $\kappa = 1, \dots, M$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$  とする。そしてその運動履歴を次の  $2M$  次元ベクトルで表し、軌跡ベクトルと呼ぶ。

$$p_\alpha = \left( x_{1\alpha} \ y_{1\alpha} \ x_{2\alpha} \ y_{2\alpha} \ \cdots \ x_{M\alpha} \ y_{M\alpha} \right)^T \quad (1)$$

(注1): 平行投影を仮定すれば画像の座標系は任意であり、通常のように画像フレームの左上を原点にとってもよい。しかし、弱透視投影や疑似透視投影を用いるときは光軸点(画像上でカメラに光軸に相当する点)を何らかの方法で指定して(通常は画像フレームの中心にとる)、そこを画像座標の原点にとる必要がある。なぜならこれらのカメラモデルは透視投影を近似しているからである。

これによって各特徴点の軌跡を  $2M$  次元空間の 1 点と同一視できる。便宜上、画像番号  $\kappa$  を「時刻  $\kappa$ 」と呼ぶ。

以下、カメラの光軸を  $Z$  軸とするカメラ  $XYZ$  座標系をとり、これに相対的にシーンが運動すると解釈する<sup>(注2)</sup>。シーン中に 3 次元座標系を任意に固定し、特徴点  $p_\alpha$  のそのシーン座標系に関する 3 次元座標を  $(a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha)$  とする。時刻  $\kappa$  でのシーン座標系の原点と各座標軸の基底ベクトルをカメラ座標系で表したものをそれぞれ  $t_\kappa, \{i_\kappa, j_\kappa, k_\kappa\}$  とすると、特徴点  $p_\alpha$  の時刻  $\kappa$  における 3 次元位置  $r_{\kappa\alpha}$  はカメラ座標系では次式となる。

$$r_{\kappa\alpha} = t_\kappa + a_\alpha i_\kappa + b_\alpha j_\kappa + c_\alpha k_\kappa \quad (2)$$

平行投影や弱透視投影や疑似透視投影を抽象化したアフィンカメラ [3], [10] は、3 次元点  $r_{\kappa\alpha}$  が次のように画像上に投影されると仮定するものである [9]。

$$\begin{pmatrix} x_{\kappa\alpha} \\ y_{\kappa\alpha} \end{pmatrix} = P_\kappa r_{\kappa\alpha} + q_\kappa \quad (3)$$

ここに  $P_\kappa, q_\kappa$  はそれぞれ時刻  $\kappa$  でのカメラの位置や内部パラメータによって定まる  $2 \times 3$  行列および 2 次元ベクトルである。式 (2) を代入すると、式 (3) は次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} x_{\kappa\alpha} \\ y_{\kappa\alpha} \end{pmatrix} = \tilde{m}_{0\kappa} + a_\alpha \tilde{m}_{1\kappa} + b_\alpha \tilde{m}_{2\kappa} + c_\alpha \tilde{m}_{3\kappa} \quad (4)$$

$\tilde{m}_{0\kappa}, \tilde{m}_{1\kappa}, \tilde{m}_{2\kappa}, \tilde{m}_{3\kappa}$  は時刻  $\kappa$  でのカメラの位置や内部パラメータで決まる 2 次元ベクトルである。これを時刻  $\kappa = 1, \dots, M$  に渡って縦に並べると、式 (1) の軌跡ベクトル  $p_\alpha$  は次のように書ける。

$$p_\alpha = m_0 + a_\alpha m_1 + b_\alpha m_2 + c_\alpha m_3 \quad (5)$$

$m_i, i = 0, 1, 2, 3$  は  $\tilde{m}_{i\kappa}$  を時刻  $\kappa = 1, \dots, M$  に渡って縦に並べた  $2M$  次元ベクトルである。

式 (5) はすべての軌跡ベクトル  $p_\alpha$  が  $2M$  次元空間中で  $m_0, m_1, m_2, m_3$  の張る「4 次元部分空間」に含まれることを表している。これを部分空間拘束条件と呼ぶ [8]。さらに  $m_0$  の係数が  $\alpha$  に依らず 1 であるから、これはすべて  $p_\alpha$  が  $2M$  次元空間中で  $m_0$  を通り、 $\{m_1, m_2, m_3\}$  の張る「3 次元アフィン空間」に含まれることを表している。これをアフィン空間拘束条件と呼ぶ [9]。これらの拘束条件は複数の運動を分離したり [7] ~ [9], [11] ~ [13]、途切れた軌跡を延長する応用 [15] の基礎となるものである。

(注2): 静止したシーンに相対的にカメラが運動すると考えても同等であるが、複数物体の運動を分離する応用 [7] ~ [9], [11] ~ [13] ではカメラを基準にせざるを得ない。この点から、カメラ座標を基準にとるほうが一貫性がある。

### 3. 処理の流れ

以上より、観測データ  $\{p_\alpha\}$  から 3 次元復元する計算は次の 4 ステップから成る。

(1) 軌跡ベクトル  $\{p_\alpha\}$  に 3 次元アフィン空間を当てはめる。

(2) 当てはめた 3 次元アフィン空間からベクトル  $m_0, m_1, m_2, m_3$  を計算する。

(3) 得られた  $m_0, m_1, m_2, m_3$  から各時刻のシーン座標系の位置  $t_\kappa$  と向き  $\{i_\kappa, j_\kappa, k_\kappa\}$  を計算する。

(4) 各特徴点の 3 次元座標  $(a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha)$  を計算し、式 (2) により 3 次元位置  $r_{\kappa\alpha}$  を計算する。

「特異値分解による因子分解」と呼ばれるのは第 1 ステップである。これは 3 次元アフィン空間の最小二乗法による当てはめである。

核心は第 2 ステップである。これは計量条件と呼ばれ、どういうカメラモデルを仮定するかに依存する。

第 3 ステップは最適化計算であるが  $\{i_\kappa, j_\kappa, k_\kappa\}$  が正規直交系であることから、これらを列として並べた行列  $R = (i_\kappa, j_\kappa, k_\kappa)$  が回転行列であるという非線形拘束条件が介入する。このような回転の最適当てはめ問題は特異値分解によって解決する [5]。

第 4 ステップは最も単純であり、

$$J = \sum_{\alpha=1}^N \|p_\alpha - m_0 - a_\alpha m_1 - b_\alpha m_2 - c_\alpha m_3\|^2 \quad (6)$$

を最小にすればよい。これは各  $(a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha)$  の 2 次式であるから、線形方程式 (正規方程式) を解いて解が定まる。

### 4. アフィン空間の当てはめ

シーン座標系の原点は任意であるから、 $N$  個の特徴点の重心にとることができる。このとき  $\sum_{\alpha=1}^N a_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N b_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N c_\alpha = 0$  であるから、式 (5) より  $m_0$  は  $\{p_\alpha\}$  の重心

$$p_C = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N p_\alpha \quad (7)$$

となる。よく知られているように、これを通る最適な 3 次元アフィン空間は、各  $p_\alpha$  の重心  $p_C$  からの差を

$$p'_\alpha = p_\alpha - p_C \quad (8)$$

と置くと、モーメント行列

$$C = \sum_{\alpha=1}^N p'_\alpha p'^\top_\alpha \quad (9)$$

の大きい3個の固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  に対応する単位固有ベクトル  $u_1, u_2, u_3$  の張る空間である [9] . したがって  $m_1, m_2, m_3$  は次のように  $u_1, u_2, u_3$  の線形結合で表せる .

$$m_j = \sum_{i=1}^3 A_{ij} u_i \quad (10)$$

しかし3次元復元に必要なのは行列  $A = (A_{ij})$  そのものではなく, 計量行列

$$T = AA^\top \quad (11)$$

である . これを定める条件がカメラモデルに依存する計量条件である .

## 5. 因子分解法のいわれ

以上のように因子分解法の“原理”は「特異値分解による因子分解」ではないが, もちろん特異値分解を用いてもよい . 実際,  $p'_1, p'_2, \dots, p'_N$  を列とする観測行列を

$$W = \begin{pmatrix} p'_1 & p'_2 & \cdots & p'_N \end{pmatrix} \quad (12)$$

と置き, これを次のように特異値分解してもよい .

$$W = U_N \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N) V_N^\top \quad (13)$$

ここに  $U_N, V_N$  はそれぞれ正規直交系を列とする  $2M \times N, N \times N$  行列であり,  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N (\geq 0)$  は特異値である ( $\text{diag}(\dots)$  は  $\dots$  を対角要素とする対角行列) . このとき  $U_N$  の第  $i$  列は式 (9) モーメント行列  $C$  の固有値  $\lambda_i = \sigma_i^2$  に対応する単位固有ベクトルになっている [6] . したがって式 (9) の  $C$  の固有値問題を解くと観測行列  $W$  の特異値分解は等価である .

$2M \times N$  行列  $W$  の特異値分解の効率は  $\min(2M, N)$  によって定まるので, 特徴点数  $N$  に比べてフレーム数 (の2倍)  $2M$  が非常に多いときは特異値分解のほうが計算量が有利になる .

式 (5) より  $p'_\alpha = a_\alpha m_1 + b_\alpha m_2 + c_\alpha m_3$  であるから, これを式 (12) に代入すると次の形に書ける .

$$W = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_N \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_N \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_N \end{pmatrix} = MS \quad (14)$$

ただし  $M$  は  $m_i$  を第  $i$  列とする  $2M \times 3$  行列であり,  $S$  は  $(a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha)^\top$  を第  $\alpha$  列とする  $3 \times N$  行列である . この記法を用いると, 式 (10) は

$$M = UA \quad (15)$$

と書ける . ただし  $U$  は  $U_N$  の最初の3列ベクトルから成る  $2M \times 3$  行列である .

Tomasi・Kanade [14] は式 (5) のアフィン空間拘束条件を式 (14) のように書き, ランク3拘束条件と呼んだ<sup>(注3)</sup> . そして  $m_1, m_2, m_3$  を計算するのに式 (13) の特異値分解を利用して式 (15) と置いて  $A$  を定めたことから, 「因子分解法は特異値分解によって行列の因子分解を行なう方法である」という解釈が生まれた . しかしこれは幾何学的な構造とそれを計算するための数値解析手段との混同であり, 特異値分解はアフィン空間の当てはめの数値計算の一手段に過ぎない .

## 6. 3次元形状復元アルゴリズム

まず因子分解法による3次元形状復元アルゴリズムの流れを記述する (導出は付録参照) . その後で個々のカメラモデルに依存する部分の計算法を述べる .

注意すべきことは, 解が二通り得られ, それぞれの復元形状は互いの鏡像になっていることである . アフィンカメラのもとでは, 両者を区別する判定法は存在しない (どちらを撮影しても同じ画像が得られる) .

入 力:

- $2M$  次元軌跡ベクトル  $\{p_\alpha\}, \alpha = 1, \dots, N$  ( $M$  は画像フレーム数,  $N$  は特徴点数) .
- シーンの平均奥行  $Z_c$  と各フレームの焦点距離  $\{f_\kappa\}$  (未知なら任意に設定してよい) .

出 力:

- 各フレームの特徴点の重心の並進ベクトル  $\{t_\kappa\}$  .
- 第1フレームに関する各特徴点の3次元位置  $\{\hat{r}_\alpha\}, \{\hat{r}'_\alpha\}$  (両者は互いの鏡像) .
- 対応する回転行列  $\{R_\kappa\}, \{R'_\kappa\}$  .

手 順 (\* はカメラモデルに依存することを表す):

【アフィン空間の当てはめ】

(1) 軌跡ベクトル  $\{p_\alpha\}$  の重心  $p_C$  を式 (7) によって計算する .

(2)  $p_C$  の第  $(2(\kappa-1)+1)$ , 第  $(2(\kappa-1)+2)$  要素をそれぞれ  $\tilde{t}_{x\kappa}, \tilde{t}_{y\kappa}$  とする .

(3) 軌跡ベクトル  $\{p_\alpha\}$  に3次元アフィン空間を当てはめ, その基底ベクトルを  $u_1, u_2, u_3$  とする .

(4) それらを列とする  $2M \times 3$  行列を  $U$  とし,  $U^\top$

(注3): 重心を基準にしなければランク4拘束条件  $(p_1 \cdots p_N) =$

$\begin{pmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_N \\ b_1 & \cdots & b_N \\ c_1 & \cdots & c_N \end{pmatrix}$  から  $\tilde{W} = \tilde{M}\tilde{S}$  の形の式が得ら

れる . この形は式 (5) のアフィン空間拘束条件により直接に対応している .

の第  $(2(\kappa - 1) + a)$  列を  $\mathbf{u}_{\kappa(a)}^\dagger$  とする ( $\kappa = 1, \dots, M, a = 1, 2$ ).

【計量行列の計算】

(5)\*  $3 \times 3$  計量行列  $T$  を計算する.

(6)  $T$  の固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  と対応する固有ベクトルの正規直交系  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  を計算する.

#  $T$  の固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  はすべて正となるべきである. 絶対値の小さい負の値は 0 とする.

【並進ベクトルの計算】

(7)\* 各時刻  $\kappa$  の並進ベクトル  $\mathbf{t}_\kappa = (t_{x\kappa}, t_{y\kappa}, t_{z\kappa})^\top$  を計算する.

【回転行列の計算】

(8) 次の  $2M$  次元ベクトルを計算する.

$$\mathbf{m}_i = \sqrt{\lambda_i} \begin{pmatrix} (\mathbf{u}_{1(1)}^\dagger, \mathbf{v}_i) \\ (\mathbf{u}_{1(2)}^\dagger, \mathbf{v}_i) \\ (\mathbf{u}_{2(1)}^\dagger, \mathbf{v}_i) \\ \vdots \\ (\mathbf{u}_{M(2)}^\dagger, \mathbf{v}_i) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (16)$$

(9)  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3$  を列とする  $2M \times 3$  行列を  $M$  とし,  $M^\top$  の第  $(2(\kappa - 1) + a)$  列を  $\mathbf{m}_{\kappa(a)}^\dagger$  とする ( $\kappa = 1, \dots, M, a = 1, 2$ ).

(10)\* 各時刻  $\kappa$  の回転行列  $R_\kappa$  を計算する.

【形状の最適化】

(11)\* 行列  $M$  を次のように再計算する.

$$M = \sum_{\kappa=1}^M \Pi_\kappa^\top R_\kappa \quad (17)$$

#  $\Pi_\kappa = (\Pi_{\kappa(ij)})$  はカメラモデルに依存する  $3 \times 2M$  行列.

(12) 3次元形状ベクトル  $\{s_\alpha\}$  を次のように計算する.

$$\mathbf{s}_\alpha = (M^\top M)^{-1} M^\top (\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_C) \quad (18)$$

【鏡像解の計算】

(13)\*  $\{s'_\alpha\}$  と  $\{R'_\kappa\}$  を次のように計算する.

$$\mathbf{s}'_\alpha = -\mathbf{s}_\alpha, \quad R'_\kappa = \Omega_\kappa R_\kappa \quad (19)$$

#  $\Omega_\kappa$  はカメラモデルに依存する回転行列.

【3次元位置と回転の出力】

(14) 2組の解  $\{\hat{\mathbf{r}}_\alpha\}, \{\hat{\mathbf{r}}'_\alpha\}$  を次のように計算する.

$$\hat{\mathbf{r}}_\alpha = \frac{Z_c}{t_{z1}} (R_1 \mathbf{s}_\alpha + \mathbf{t}_1), \quad \hat{\mathbf{r}}'_\alpha = \frac{Z_c}{t_{z1}} (R'_1 \mathbf{s}'_\alpha + \mathbf{t}_1) \quad (20)$$

## 7. 平行投影カメラモデル

前節の\*のついたステップは仮定するカメラモデルに

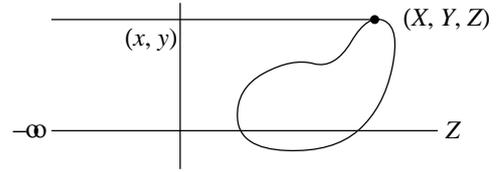


図1 平行投影.

依存する. 平行投影とは空間の点  $(X, Y, Z)$  が

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (21)$$

の関係によって画像上の点  $(x, y)$  に投影されるとみなすものである(図1). 平行投影を仮定すると, 前節の\*のステップは次のようになる(導出は付録参照).

【計量行列の計算】

(1) 次のように  $3 \times 3 \times 3 \times 3$  テンソル  $B = (B_{ijkl})$  を定義する.

$$B_{ijkl} = \sum_{\kappa=1}^M \left[ (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_i (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_j (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_k (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_l + (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_i (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_j (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_k (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_l + \frac{1}{4} \left( (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_i (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_j + (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_i (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_j \right) \left( (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_k (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_l + (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_k (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_l \right) \right] \quad (22)$$

#  $(\mathbf{u}_{\kappa(a)}^\dagger)_i$  は3次元ベクトル  $\mathbf{u}_{\kappa(a)}^\dagger$  の第  $i$  成分.

(2) 次の  $6 \times 6$  対称行列を定義する.

$$B = \begin{pmatrix} B_{1111} & B_{1122} & B_{1133} \\ B_{2211} & B_{2222} & B_{2233} \\ B_{3311} & B_{3322} & B_{3333} \\ \sqrt{2}B_{2311} & \sqrt{2}B_{2322} & \sqrt{2}B_{2333} \\ \sqrt{2}B_{3111} & \sqrt{2}B_{3122} & \sqrt{2}B_{3133} \\ \sqrt{2}B_{1211} & \sqrt{2}B_{1222} & \sqrt{2}B_{1233} \\ \sqrt{2}B_{1123} & \sqrt{2}B_{1131} & \sqrt{2}B_{1112} \\ \sqrt{2}B_{2223} & \sqrt{2}B_{2231} & \sqrt{2}B_{2212} \\ \sqrt{2}B_{3323} & \sqrt{2}B_{3331} & \sqrt{2}B_{3312} \\ 2B_{2323} & 2B_{2331} & 2B_{2312} \\ 2B_{3123} & 2B_{3131} & 2B_{3112} \\ 2B_{1223} & 2B_{1231} & 2B_{1212} \end{pmatrix} \quad (23)$$

(3) 次の6次元ベクトル  $\mathbf{c}$  を定義する.

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top \quad (24)$$

(4) 次の6次元連立1次方程式を解いて, 6次元ベクトル  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_i)$  を求める.

$$B\boldsymbol{\tau} = \mathbf{c} \quad (25)$$

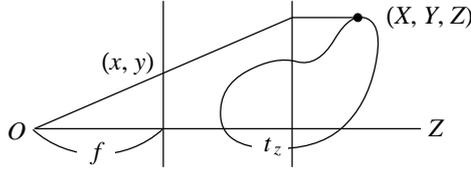


図2 弱透視投影 .

(5) 計量行列  $T$  を次のように計算する .

$$T = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_6/\sqrt{2} & \tau_5/\sqrt{2} \\ \tau_6/\sqrt{2} & \tau_2 & \tau_4/\sqrt{2} \\ \tau_5/\sqrt{2} & \tau_4/\sqrt{2} & \tau_3 \end{pmatrix} \quad (26)$$

#### 【並進ベクトルの計算】

(1)  $t_{z\kappa} = Z_c$  と置く ( $\kappa = 1, \dots, 2M$ ) .

(2)  $t_{x\kappa} = \tilde{t}_{x\kappa}$ ,  $t_{y\kappa} = \tilde{t}_{y\kappa}$  と置く ( $\kappa = 1, \dots, 2M$ ) .

#### 【回転行列の計算】

(1) 各  $\kappa$  に対して次の特異値分解を計算する .

$$\begin{pmatrix} m_{\kappa(1)}^\dagger & m_{\kappa(2)}^\dagger & \mathbf{0} \end{pmatrix} = V_\kappa \Lambda_\kappa U_\kappa^\top \quad (27)$$

(2) 回転行列  $\{R_\kappa\}$  を次のように計算する .

$$R_\kappa = U_\kappa \text{diag}(1, 1, \det(V_\kappa U_\kappa^\top)) V_\kappa^\top \quad (28)$$

#### 【形状復元の行列と鏡像解の回転行列】

$$\Pi_\kappa = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^{(2\kappa-1)(2\kappa)}, \quad (29)$$

$$\Omega_\kappa = \text{diag}(-1, -1, 1) \quad (30)$$

## 8. 弱透視投影カメラモデル

弱透視投影 [3], [10] とは空間の点  $(X, Y, Z)$  が次のように画像上の点  $(x, y)$  に投影されるとみなすものである<sup>(注4)</sup> (図2) .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{f}{t_z} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (31)$$

ただし  $f$  はカメラの焦点距離であり,  $t_z$  はシーン座標系の原点  $t$  の第3成分である .

弱透視投影を仮定すると, 各フレームの焦点距離  $\{f_\kappa\}$ ,  $\kappa = 1, \dots, M$  を指定する必要がある . しかし未知なら任意に設定してよい . 復元結果はその値には依らない . これは  $t_z$  が定数倍の不定性を持ち, これを最終的に平均奥行き値  $Z_c$  によって正規化するためである . \* のステップの計算は次のようになる (導出は付録参照) .

(注4): 脚注1で述べたように, これは透視投影の近似であるから, 光軸点 (画像上でカメラの光軸に当たる点) を何らかの方法で (例えば画像フレームの中心に) 指定して, それを画像座標系の原点にとる必要がある .

#### 【計量行列の計算】

(1) 次のように  $3 \times 3 \times 3 \times 3$  テンソル  $B = (B_{ijkl})$  を定義する .

$$B_{ijkl} = \sum_{\kappa=1}^M \left[ (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_i (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_j (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_k (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_l - (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_i (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_j (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_k (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_l - (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_i (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_j (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_k (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_l + (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_i (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_j (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_k (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_l + \frac{1}{4} \left( (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_i (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_j (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_k (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_l + (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_i (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_j (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_k (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_l + (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_i (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_j (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_k (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_l + (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_i (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_j (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_k (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_l \right) \right] \quad (32)$$

(2) 式(23)の  $6 \times 6$  対称行列  $B$  を計算する .

(3)  $B$  の最小固有値に対する6次元単位固有ベクトル  $\tau = (\tau_i)$  を計算する .

(4) 計量行列  $T$  を式(26)によって計算する .

(5)  $\det T < 0$  であれば  $T \leftarrow -T$  と符号を換える .

#### 【並進ベクトルの計算】

(1)  $t_{z\kappa}$  を次のように計算する .

$$t_{z\kappa} = f_\kappa \sqrt{\frac{2}{(\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger, T \mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger) + (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger, T \mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)}} \quad (33)$$

(2)  $t_{x\kappa}$ ,  $t_{y\kappa}$  を次のように計算する .

$$t_{x\kappa} = \frac{t_{z\kappa}}{f_\kappa} \tilde{t}_{x\kappa}, \quad t_{y\kappa} = \frac{t_{z\kappa}}{f_\kappa} \tilde{t}_{y\kappa} \quad (34)$$

#### 【回転行列の計算】

(1) 各  $\kappa$  に対して次の特異値分解を計算する .

$$\frac{t_{z\kappa}}{f_\kappa} \begin{pmatrix} m_{\kappa(1)}^\dagger & m_{\kappa(2)}^\dagger & \mathbf{0} \end{pmatrix} = V_\kappa \Lambda_\kappa U_\kappa^\top \quad (35)$$

(2) 回転行列  $\{R_\kappa\}$  を式(28)によって計算する .

#### 【形状復元の行列と鏡像解の回転行列】

$$\Pi_\kappa = \frac{f_\kappa}{t_{z\kappa}} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^{(2\kappa-1)(2\kappa)}, \quad (36)$$

$$\Omega_\kappa = \text{diag}(-1, -1, 1) \quad (37)$$

## 9. 疑似透視投影カメラモデル

疑似透視投影 [10] とは空間の点  $(X, Y, Z)$  が次のように画像上の点  $(x, y)$  に投影されるとみなすものである<sup>(注5)</sup>

(注5): これも透視投影の近似であるから, 弱透視投影の場合と同様に, 光軸点を何らかの方法で (例えば画像フレームの中心に) 指定して, そこを画像座標系の原点にとる必要がある .

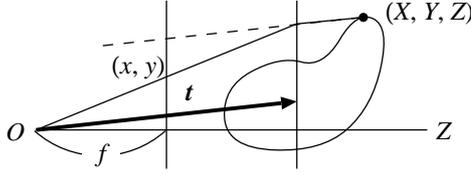


図3 疑似透視投影.

(図3).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{f}{t_z} \left( \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \left(1 - \frac{Z}{t_z}\right) \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} \right) \quad (38)$$

ここに  $t_x, t_y, t_z$  はそれぞれシーン座標系の原点  $t$  の第1, 第2, 第3成分である.

疑似投影を仮定すると, 弱透視投影の場合と同様に各フレームの焦点距離  $\{f_\kappa\}$ ,  $\kappa = 1, \dots, M$  を指定する必要があるが, 未知なら任意に設定してよい (弱透視投影の場合と同様に復元結果はその値には依らない). \* のステップの計算は次のようになる (導出は付録参照).

【計量行列の計算】

(1) 次のように置く ( $\kappa = 1, \dots, M$ ).

$$\alpha_\kappa = \frac{1}{1 + \tilde{t}_{x\kappa}^2 / f_\kappa^2}, \quad \beta_\kappa = \frac{1}{1 + \tilde{t}_{y\kappa}^2 / f_\kappa^2},$$

$$\gamma_\kappa = \frac{\tilde{t}_{x\kappa} \tilde{t}_{y\kappa}}{f_\kappa^2} \quad (39)$$

(2) 次のように  $3 \times 3 \times 3 \times 3$  テンソル  $\mathcal{B} = (B_{ijkl})$  を定義する.

$$B_{ijkl} = \sum_{\kappa=1}^M \left[ (\gamma_\kappa^2 + 1) \alpha_\kappa^2 (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_i (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_j (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_k (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_l \right. \\ + (\gamma_\kappa^2 + 1) \beta_\kappa^2 (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_i (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_j (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_k (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_l \\ + (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_i (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_j (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_k (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_l \\ + (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_i (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_j (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_k (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_l \\ + (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_i (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_j (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_k (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_l \\ + (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_i (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_j (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_k (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_l \\ - \alpha_\kappa \gamma_\kappa (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_i (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_j (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_k (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_l \\ - \alpha_\kappa \gamma_\kappa (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_i (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_j (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_k (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_l \\ - \alpha_\kappa \gamma_\kappa (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_i (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_j (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_k (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_l \\ - \alpha_\kappa \gamma_\kappa (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_i (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_j (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_k (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_l \\ - \beta_\kappa \gamma_\kappa (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_i (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_j (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_k (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_l \\ - \beta_\kappa \gamma_\kappa (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_i (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_j (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_k (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_l \\ - \beta_\kappa \gamma_\kappa (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_i (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_j (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_k (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_l \\ - \beta_\kappa \gamma_\kappa (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_i (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_j (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_k (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_l \\ \left. + (\gamma_\kappa^2 - 1) \alpha_\kappa \gamma_\kappa (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_i (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_j (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_k (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_l \right]$$

$$+ (\gamma_\kappa^2 - 1) \alpha_\kappa \gamma_\kappa (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_i (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)_j (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_k (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger)_l \quad (40)$$

(3) 式(23)の  $6 \times 6$  対称行列  $B$  を計算する.

(4)  $B$  の最小固有値に対する6次元単位固有ベクトル  $\tau = (\tau_i)$  を計算する.

(5) 計量行列  $T$  を式(26)によって計算する.

(6)  $\det T < 0$  であれば  $T \leftarrow -T$  と符号を換える.

【並進ベクトルの計算】

(1)  $t_{z\kappa}$  を次のように計算する.

$$t_{z\kappa} = f_\kappa \sqrt{\frac{2}{\alpha_\kappa (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger, \mathbf{T} \mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger) + \beta_\kappa (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger, \mathbf{T} \mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)}} \quad (41)$$

(2)  $t_{x\kappa}, t_{y\kappa}$  を式(34)によって計算する.

【回転行列の計算】

(1) 各  $\kappa$  に対して次の  $\{\mathbf{r}_{\kappa(1)}^\dagger, \mathbf{r}_{\kappa(2)}^\dagger, \mathbf{r}_{\kappa(3)}^\dagger\}$  を計算する.

$$\mathbf{r}_{\kappa(3)}^\dagger = \frac{t_{z\kappa}}{f_\kappa \left(1 + (t_{x\kappa}/t_{z\kappa})^2 + (t_{y\kappa}/t_{z\kappa})^2\right)} \\ \left( \frac{t_{z\kappa}}{f_\kappa} \mathbf{m}_{\kappa(1)}^\dagger \times \mathbf{m}_{\kappa(2)}^\dagger - \frac{t_{x\kappa}}{t_{z\kappa}} \mathbf{m}_{\kappa(1)}^\dagger - \frac{t_{y\kappa}}{t_{z\kappa}} \mathbf{m}_{\kappa(2)}^\dagger \right),$$

$$\mathbf{r}_{\kappa(1)}^\dagger = \frac{t_{z\kappa}}{f_\kappa} \mathbf{m}_{\kappa(1)}^\dagger + \frac{t_{x\kappa}}{t_{z\kappa}} \mathbf{r}_{\kappa(3)}^\dagger,$$

$$\mathbf{r}_{\kappa(2)}^\dagger = \frac{t_{z\kappa}}{f_\kappa} \mathbf{m}_{\kappa(2)}^\dagger + \frac{t_{y\kappa}}{t_{z\kappa}} \mathbf{r}_{\kappa(3)}^\dagger \quad (42)$$

(2) 次の特異値分解を計算する.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_{\kappa(1)}^\dagger & \mathbf{r}_{\kappa(2)}^\dagger & \mathbf{r}_{\kappa(3)}^\dagger \end{pmatrix} = \mathbf{V}_\kappa \mathbf{\Lambda}_\kappa \mathbf{U}_\kappa^\top \quad (43)$$

(3) 回転行列  $\{\mathbf{R}_\kappa\}$  を式(28)によって計算する.

【形状復元の行列と鏡像解の回転行列】

$$\Pi_\kappa = \frac{f_\kappa}{t_{z\kappa}} \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & 1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 & 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 & -t_{x\kappa}/t_{z\kappa} & -t_{y\kappa}/t_{z\kappa} & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}, \quad (44)$$

$$\mathbf{\Omega}_\kappa = \frac{2t_\kappa t_\kappa^\top}{\|t_\kappa\|^2} - \mathbf{I} \quad (45)$$

## 10. まとめ

本論文では Tomasi・Kanade の因子分解法の原理が投影のアフィンカメラモデルによる近似であり, 特異値分解は数値計算の一手段に過ぎないことを示した. そして, 問題の幾何学的な構造を示し, 「平行投影」, 「弱透視投影」, 「疑似透視投影」を仮定する3次元復元の完全なプログラミング法を記述した<sup>(注6)</sup>. これにより, 誰でも直ち

(注6): 次のサイトにコード化したC++プログラムを公開している.  
<http://www.suri.it.okayama-u.ac.jp/>

に因子分解法が実装できる．

本文中で省略した計算手順の意味，理由，導出を付録に示す．

謝辞：本研究の一部は文部科学省科学研究費基盤研究 C(2) (No. 15500113)，テレコム先端技術センター，栢森情報科学財団の助成によった．本研究に関する有益な指摘を頂いた産業技術総合研究所の藤木淳氏，および実験に参加して頂いた岡山大学大学院生の坪内貴之氏に感謝します．

## 文 献

- [1] 藤木淳, 点対応を用いた複数の 2 画像からの 3 次元形状復元—因子分解法の数理—, 統計数理, 49-1 (2001), 77–107.
- [2] R. Hartley and A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2000.
- [3] 金出武雄, コンラッド・ポールマン, 森田俊彦, 因子分解法による物体形状とカメラ運動の復元, 電子情報通信学会論文誌 D-II, J74-D-II-8 (1993-8), 1497–1505.
- [4] 金谷健一, 因子分解を用いない因子分解法: 平行投影から透視変換へ, 電子情報通信学会技術報告, PRMU98-26 (1998-6), 1–8.
- [5] K. Kanatani, *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.
- [6] 金谷健一, 「これなら分かる応用数学教室—最小二乗法からウェーブレットまで—」, 共立出版, 2003.
- [7] 金谷健一, 黒澤典義, 松永力, モデル選択によるランク推定と複数運動の分離, 情報処理学会研究報告, 2001-CVIM-126-3 (2001-3), 17–24.
- [8] 黒澤典義, 金谷健一, 部分空間分離法とモデル選択による運動物体の分離, 情報処理学会研究報告, 2000-CVIM-124-4 (2000-11), 25–32.
- [9] 黒澤典義, 金谷健一, アフィン空間分離法による運動物体の分離, 情報処理学会研究報告, 2001-CVIM-125-3 (2001-3), 25–32.
- [10] C. J. Poelman and T. Kanade, A paraperspective factorization method for shape and motion recovery, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, 19-3 (1997-3), 206–218.
- [11] 菅谷保之, 金谷健一, 部分空間分離法による特徴点追跡のアウトライア除去, 情報処理学会研究報告, 2002-CVIM-133-24 (2002-5), 177–184.
- [12] 菅谷保之, 金谷健一, 運動物体分離のためのカメラモデルの自動選択, 情報処理学会研究報告, 2002-CVIM-134-2 (2002-9), 9–16.
- [13] 菅谷保之, 金谷健一, 複数運動の教師なし学習による多段階最適化情報処理学会研究報告, 2003-CVIM-138-25 (2003-5), 185–192.
- [14] C. Tomasi and T. Kanade, Shape and motion from image streams under orthography—A factorization method, *Int. J. Comput. Vision*, 9-2 (1992-10), 137–154.
- [15] 坪内貴之, 菅谷保之, 金谷健一, 3 次元アフィン復元のための途切れた特徴点追跡の延長情報処理学会研究報告, 2003-CVIM-137-17 (2003-3), 133–140.

## 付録：計算手順の導出

### A. 平行投影モデル

平行投影の式 (21) は，投影行列を

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (46)$$

と定義すると，次のように書ける．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{\Pi} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (47)$$

### 【計量行列の計算】

式 (4) の  $\tilde{m}_{1\kappa}$ ,  $\tilde{m}_{2\kappa}$ ,  $\tilde{m}_{3\kappa}$  は次のように書ける．

$$\tilde{m}_{1\kappa} = \mathbf{\Pi} \mathbf{i}_{\kappa}, \quad \tilde{m}_{2\kappa} = \mathbf{\Pi} \mathbf{j}_{\kappa}, \quad \tilde{m}_{3\kappa} = \mathbf{\Pi} \mathbf{k}_{\kappa} \quad (48)$$

時刻  $\kappa$  での正規直交系  $\{\mathbf{i}_{\kappa}, \mathbf{j}_{\kappa}, \mathbf{k}_{\kappa}\}$  を列とする行列

$$\mathbf{R}_{\kappa} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{\kappa} & \mathbf{j}_{\kappa} & \mathbf{k}_{\kappa} \end{pmatrix} \quad (49)$$

は時刻  $\kappa$  におけるシーン座標系の向きを表す回転行列である．これを用いると式 (48) は次のように書ける．

$$\begin{pmatrix} \tilde{m}_{1\kappa} & \tilde{m}_{2\kappa} & \tilde{m}_{3\kappa} \end{pmatrix} = \mathbf{\Pi} \mathbf{R}_{\kappa} \quad (50)$$

$\mathbf{R}_{\kappa}$  は直交行列であるから次の関係を得る．

$$\begin{pmatrix} \tilde{m}_{1\kappa} & \tilde{m}_{2\kappa} & \tilde{m}_{3\kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{m}_{1\kappa} & \tilde{m}_{2\kappa} & \tilde{m}_{3\kappa} \end{pmatrix}^{\top} = \mathbf{\Pi} \mathbf{R}_{\kappa} \mathbf{R}_{\kappa}^{\top} \mathbf{\Pi}^{\top} = \mathbf{\Pi} \mathbf{\Pi}^{\top} = \mathbf{I} \quad (51)$$

6 節のステップ 9 で定義したベクトル  $\mathbf{m}_{\kappa(a)}^{\dagger}$  を用いると，上式は次のように書ける．

$$\begin{pmatrix} \mathbf{m}_{\kappa(1)}^{\dagger} & \mathbf{m}_{\kappa(2)}^{\dagger} \end{pmatrix}^{\top} \begin{pmatrix} \mathbf{m}_{\kappa(1)}^{\dagger} & \mathbf{m}_{\kappa(2)}^{\dagger} \end{pmatrix} = \mathbf{I} \quad (52)$$

要素を取り出すと次のようになる．

$$\|\mathbf{m}_{\kappa(1)}^{\dagger}\|^2 = \|\mathbf{m}_{\kappa(2)}^{\dagger}\|^2 = 1, \quad (\mathbf{m}_{\kappa(1)}^{\dagger}, \mathbf{m}_{\kappa(2)}^{\dagger}) = 0 \quad (53)$$

式 (15) より  $\mathbf{M}^{\top} = \mathbf{A}^{\top} \mathbf{U}^{\top}$  であるから，6 節のステップ 4 のようにベクトル  $\mathbf{u}_{\kappa(a)}^{\dagger}$  を定義すると次の関係を得る．

$$\mathbf{m}_{\kappa(a)}^{\dagger} = \mathbf{A}^{\top} \mathbf{u}_{\kappa(a)}^{\dagger} \quad (54)$$

これを式 (53) に代入すると次のように書ける．

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^{\top} \mathbf{u}_{\kappa(1)}^{\dagger}, \mathbf{A}^{\top} \mathbf{u}_{\kappa(1)}^{\dagger}) &= (\mathbf{A}^{\top} \mathbf{u}_{\kappa(2)}^{\dagger}, \mathbf{A}^{\top} \mathbf{u}_{\kappa(2)}^{\dagger}) = 1, \\ (\mathbf{A}^{\top} \mathbf{u}_{\kappa(1)}^{\dagger}, \mathbf{A}^{\top} \mathbf{u}_{\kappa(2)}^{\dagger}) &= 0 \end{aligned} \quad (55)$$

変形して式 (11) の計量行列  $\mathbf{T}$  を用いると次式を得る．

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^{\dagger}, \mathbf{T} \mathbf{u}_{\kappa(1)}^{\dagger}) &= (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^{\dagger}, \mathbf{T} \mathbf{u}_{\kappa(2)}^{\dagger}) = 1, \\ (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^{\dagger}, \mathbf{T} \mathbf{u}_{\kappa(2)}^{\dagger}) &= 0 \end{aligned} \quad (56)$$

そこで  $\mathbf{T}$  を次の関数を最小にするように定める．

$$\begin{aligned} K &= \sum_{\kappa=1}^M \left[ \left( (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^{\dagger}, \mathbf{T} \mathbf{u}_{\kappa(1)}^{\dagger}) - 1 \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( (\mathbf{u}_{\kappa(2)}^{\dagger}, \mathbf{T} \mathbf{u}_{\kappa(2)}^{\dagger}) - 1 \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{u}_{\kappa(1)}^{\dagger}, \mathbf{T} \mathbf{u}_{\kappa(2)}^{\dagger})^2 \right] \end{aligned} \quad (57)$$

これを  $T_{ij}$  で微分して 0 を置くと次の連立 1 次方程式を

得る．

$$\sum_{i,j,k,l=1}^3 B_{ijkl} T_{kl} = \delta_{ij} \quad (58)$$

ただしテンソル  $B = (B_{ijkl})$  を式 (22) のように定義した．式 (23) のように  $6 \times 6$  対称行列  $B$  を定義し， $T$  は対称行列であるから式 (26) のように 6 次元ベクトル  $\tau$  を定義し，6 次元ベクトル  $c$  を式 (24) のように定義すると上式は式 (25) のように書き直せる．この解  $\tau$  から式 (26) によって解  $T$  が得られる．

#### 【並進ベクトルの計算】

平行投影では奥行き情報が失われているので，時刻  $\kappa$  でのシーン座標系の原点  $t_\kappa = (t_{x\kappa}, t_{y\kappa}, t_{z\kappa})^\top$  の  $Z$  座標は便宜上，常に入力で指定した奥行き値  $Z_C$  に等しいと置く．そして  $(t_{x\kappa}, t_{y\kappa})$  は時刻  $\kappa$  に画像に写る特徴点の  $xy$  座標に重心，すなわち  $(\tilde{t}_{x\kappa}, \tilde{t}_{y\kappa})$  に等しいとする．

#### 【回転行列の計算】

計量行列  $T$  の固有値を  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ，対応する単位固有ベクトルの正規直交系を  $\{v_1, v_2, v_3\}$  とすると次のように書ける．

$$T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}^\top \quad (59)$$

これが  $AA^\top$  に等しいことから， $A$  が

$$\begin{aligned} A &= \pm \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3}) Q \\ &= \pm \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} v_1 & \sqrt{\lambda_2} v_2 & \sqrt{\lambda_3} v_3 \end{pmatrix} Q \end{aligned} \quad (60)$$

と書ける．ただし  $Q$  は任意の回転である．これはシーン座標系の向きの取り方に回転の不定性があることに対応する．また符号は復元に鏡像の不定性があることに対応する．そこで仮に  $+$  の符号を選び， $Q = I$  として一つの解を定める．このとき式 (15) の行列  $M$  の第  $i$  列は次のようになる．

$$m_i = \begin{pmatrix} u_{1(1)}^{\dagger\top} \\ u_{1(2)}^{\dagger\top} \\ u_{2(1)}^{\dagger\top} \\ u_{2(2)}^{\dagger\top} \\ \vdots \\ u_{M(2)}^{\dagger\top} \end{pmatrix} \sqrt{\lambda_i} v_i \quad (61)$$

これを書き直すと式 (16) となる．

式 (50) の両辺を転置し， $R_\kappa^\top$  の第  $i$  列を  $r_{\kappa(i)}^\dagger$  と置くと， $m_{\kappa(a)}^\dagger$  の定義と式 (46) より次のように書ける．

$$\begin{pmatrix} m_{\kappa(1)}^\dagger & m_{\kappa(2)}^\dagger \end{pmatrix} = R_\kappa^\top \Pi^\top = \begin{pmatrix} r_{\kappa(1)}^\dagger & r_{\kappa(2)}^\dagger \end{pmatrix}$$

(62)

ゆえに  $r_{\kappa(1)}^\dagger, r_{\kappa(2)}^\dagger$  は次のようになる．

$$r_{\kappa(1)}^\dagger = m_{\kappa(1)}^\dagger, \quad r_{\kappa(2)}^\dagger = m_{\kappa(2)}^\dagger \quad (63)$$

$\{r_{\kappa(1)}^\dagger, r_{\kappa(2)}^\dagger, r_{\kappa(3)}^\dagger\}$  が右手正規直交系であるから，理論的には  $r_{\kappa(3)}^\dagger = r_{\kappa(1)}^\dagger \times r_{\kappa(2)}^\dagger$  であるが，データに誤差があるときは上式で計算した  $r_{\kappa(1)}^\dagger, r_{\kappa(2)}^\dagger$  が必ずしも厳密な正規直交系ではない．厳密な正規直交系に直すために，式 (27) のように特異値分解する．これから  $V_\kappa U_\kappa^\top$  が  $R_\kappa^\top$  の最良近似となる [5]．ただし  $V_\kappa U_\kappa^\top$  が回転行列の行列式は 1 でなければならないので式 (28) のように変形する．

#### 【形状の計算】

式 (29) の行列  $\Pi_\kappa$  の定義と式 (49), (50) を合わせると，6 節のステップ 9 で定義した行列  $M$  は式 (17) のように書ける．3 次元形状ベクトルを  $s_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha)^\top$  と定義すると，式 (6) は次のように書ける．

$$J = \sum_{\alpha=1}^N \|p_\alpha - m_0 - M s_\alpha\|^2 \quad (64)$$

$m_0$  は  $\{p_\alpha\}$  の重心  $p_C$  であるから，この最小二乗解は式 (18) で与えられる．

#### 【鏡像解の計算】

以上では式 (60) の符号を 1 に選んだが， $-1$  とした場合式 (16) の  $m_i$  の符号が換わる．したがって  $M, m_{\kappa(a)}^\dagger$  も符号が換わる．式 (17) で  $M$  の符号が換わることから，式 (18) で形状ベクトル  $s_\alpha$  の符号が換わる．

また  $\tilde{m}_{1\kappa}, \tilde{m}_{2\kappa}, \tilde{m}_{3\kappa}$  の符号が変わることから式 (50) より  $\Pi R_\kappa = -\Pi R'_\kappa$  となる鏡像解  $R'_\kappa$  が発生する．両辺を転置し， $R'_\kappa R_\kappa^\top = \Omega_\kappa$  と置くと，この関係は次のように書ける．

$$\Omega_\kappa \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (65)$$

したがって  $\Omega_\kappa$  はベクトル  $(1, 0, 0)^\top, (0, 1, 0)^\top$  をそれぞれ  $(-1, 0, 0)^\top, (0, -1, 0)^\top$  に写像する回転行列であり， $\Omega_\kappa = \text{diag}(-1, -1, 1)$  となる．

## B. 弱透視投影モデル

弱透視投影の式 (31) は，投影行列  $\Pi$  を

$$\Pi = \frac{f}{t_z} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (66)$$

と定義すると，式 (47) と同じ形になる．

【計量行列の計算】

式 (4) の  $\tilde{m}_{0\kappa}$ ,  $\tilde{m}_{1\kappa}$ ,  $\tilde{m}_{2\kappa}$ ,  $\tilde{m}_{3\kappa}$  は次のように書ける .

$$\begin{aligned}\tilde{m}_{0\kappa} &= \Pi_{\kappa} t_{\kappa}, & \tilde{m}_{1\kappa} &= \Pi_{\kappa} \dot{i}_{\kappa}, \\ \tilde{m}_{2\kappa} &= \Pi_{\kappa} \dot{j}_{\kappa}, & \tilde{m}_{3\kappa} &= \Pi_{\kappa} \dot{k}_{\kappa}\end{aligned}\quad (67)$$

ただし  $\Pi_{\kappa}$  は式 (66) で  $f$ ,  $t_z$  をそれぞれ時刻  $\kappa$  の値  $f_{\kappa}$ ,  $t_{z\kappa}$  に置き換えたものである . 式 (49) の回転行列を  $R_{\kappa}$  を用いると次のように書ける .

$$\begin{pmatrix} \tilde{m}_{1\kappa} & \tilde{m}_{2\kappa} & \tilde{m}_{3\kappa} \end{pmatrix} = \Pi_{\kappa} R_{\kappa} \quad (68)$$

$R_{\kappa}$  は直交行列であるから次の関係を得る .

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \tilde{m}_{1\kappa} & \tilde{m}_{2\kappa} & \tilde{m}_{3\kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{m}_{1\kappa} & \tilde{m}_{2\kappa} & \tilde{m}_{3\kappa} \end{pmatrix}^{\top} \\ = \Pi_{\kappa} R_{\kappa} R_{\kappa}^{\top} \Pi_{\kappa}^{\top} = \Pi_{\kappa} \Pi_{\kappa}^{\top} = \frac{f_{\kappa}^2}{t_{z\kappa}^2} I\end{aligned}\quad (69)$$

6 節のステップ 9 で定義したベクトル  $m_{\kappa(a)}^{\dagger}$  を用いると, 上式は次のように書ける .

$$\begin{pmatrix} m_{\kappa(1)}^{\dagger} & m_{\kappa(2)}^{\dagger} \end{pmatrix}^{\top} \begin{pmatrix} m_{\kappa(1)}^{\dagger} & m_{\kappa(2)}^{\dagger} \end{pmatrix} = \frac{f_{\kappa}^2}{t_{z\kappa}^2} I \quad (70)$$

要素を取り出すと次のようになる .

$$\|m_{\kappa(1)}^{\dagger}\|^2 = \|m_{\kappa(2)}^{\dagger}\|^2 = \frac{f_{\kappa}^2}{t_{z\kappa}^2}, \quad (m_{\kappa(1)}^{\dagger}, m_{\kappa(2)}^{\dagger}) = 0 \quad (71)$$

式 (15) より  $M^{\top} = A^{\top} U^{\top}$  であるから, 6 節のステップ 4 のようにベクトル  $u_{\kappa(a)}^{\dagger}$  を定義すると,  $m_{\kappa(a)}^{\dagger}$  は式 (54) のように書ける . これを式 (71) に代入すると次のように書ける .

$$\begin{aligned}(A^{\top} u_{\kappa(1)}^{\dagger}, A^{\top} u_{\kappa(1)}^{\dagger}) &= (A^{\top} u_{\kappa(2)}^{\dagger}, A^{\top} u_{\kappa(2)}^{\dagger}) = \frac{f_{\kappa}^2}{t_{z\kappa}^2}, \\ (A^{\top} u_{\kappa(1)}^{\dagger}, A^{\top} u_{\kappa(2)}^{\dagger}) &= 0\end{aligned}\quad (72)$$

変形して式 (11) の計量行列  $T$  を用いると, 次の二つの条件を得る .

$$\begin{aligned}(u_{\kappa(1)}^{\dagger}, T u_{\kappa(1)}^{\dagger}) &= (u_{\kappa(2)}^{\dagger}, T u_{\kappa(2)}^{\dagger}) = \frac{f_{\kappa}^2}{t_{z\kappa}^2}, \\ (u_{\kappa(1)}^{\dagger}, T u_{\kappa(2)}^{\dagger}) &= 0\end{aligned}\quad (73)$$

そこで  $T$  を次の関数を最小にするように定める .

$$\begin{aligned}K &= \sum_{\kappa=1}^M \left[ \left( (u_{\kappa(1)}^{\dagger}, T u_{\kappa(1)}^{\dagger}) - (u_{\kappa(2)}^{\dagger}, T u_{\kappa(2)}^{\dagger}) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + (u_{\kappa(1)}^{\dagger}, T u_{\kappa(2)}^{\dagger})^2 \right]\end{aligned}\quad (74)$$

式 (32) のようにテンソル  $B = (B_{ijkl})$  を定義すると次のように書ける .

$$K = \sum_{i,j,k,l=1}^3 B_{ijkl} T_{ij} T_{kl} \quad (75)$$

式 (73) より行列  $T = (T_{ij})$  にはスケールの不定性がある . なぜなら  $T$  を 2 倍することは  $t_{z\kappa}$  を  $1/\sqrt{2}$  倍することを意味するが, (66) より  $\Pi_{\kappa}$  も  $1/\sqrt{2}$  倍され, 式 (68) から  $\tilde{i}_{\kappa}$ ,  $\tilde{j}_{\kappa}$ ,  $\tilde{k}_{\kappa}$  もすべて  $1/\sqrt{2}$  倍される . しかし式 (5) より  $a_{\alpha}$ ,  $b_{\alpha}$ ,  $c_{\alpha}$  をすべて  $\sqrt{2}$  倍すれば観測データに適合する . このように  $T$  のスケールは不定であるから  $\|T\| = 1$  と正規化しても一般性を失わない .

式 (23) のように  $6 \times 6$  対称行列  $B$  を定義し,  $T$  は対称行列であるから式 (26) のように 6 次元ベクトル  $\tau$  を定義すると, 式 (75) は次のように書ける .

$$K = (\tau, B\tau) \quad (76)$$

$K$  は二乗和として定義したから  $B$  は半正値対称行列である .  $\tau$  の定義から  $\|T\| = 1$  は  $\|\tau\| = 1$  と同値であるから,  $K$  を最小にする単位ベクトル  $\tau$  は  $B$  の最小固有値に対応する単位固有ベクトルである [6] . これから式 (26) によって解  $T$  が得られる . ただし固有ベクトルは符号が未定であり,  $T$  は半正値でなければならないから  $\det T < 0$  なら  $T$  の符号を換える .

【並進ベクトルの計算】

計量行列  $T$  が定まれば, 式 (73) の最初の式から  $t_{z\kappa}$  が式 (33) のように定まる . 式 (67) の第 1 式より  $t_{x\kappa}$ ,  $t_{y\kappa}$  が式 (34) のように定まる .

【回転行列の計算】

平行投影の場合と同様に式 (15) の行列  $M$  の第  $i$  列が式 (16) のように得られる . これからベクトル  $m_{\kappa(a)}^{\dagger}$  も定まる .

式 (68) の両辺を転置し,  $R_{\kappa}^{\top}$  の第  $i$  列を  $r_{\kappa(i)}^{\dagger}$  と置くと,  $m_{\kappa(a)}^{\dagger}$  の定義より次のように書ける .

$$\begin{pmatrix} m_{\kappa(1)}^{\dagger} & m_{\kappa(2)}^{\dagger} \end{pmatrix} = R_{\kappa}^{\top} \Pi_{\kappa}^{\top} = \frac{f_{\kappa}}{t_{z\kappa}} \begin{pmatrix} r_{\kappa(1)}^{\dagger} & r_{\kappa(2)}^{\dagger} \end{pmatrix} \quad (77)$$

ゆえに  $r_{\kappa(1)}^{\dagger}$ ,  $r_{\kappa(2)}^{\dagger}$  は次のようになる .

$$r_{\kappa(1)}^{\dagger} = \frac{t_{z\kappa}}{f_{\kappa}} m_{\kappa(1)}^{\dagger}, \quad r_{\kappa(2)}^{\dagger} = \frac{t_{z\kappa}}{f_{\kappa}} m_{\kappa(2)}^{\dagger} \quad (78)$$

$\{r_{\kappa(1)}^{\dagger}, r_{\kappa(2)}^{\dagger}, r_{\kappa(3)}^{\dagger}\}$  が右手正規直交系であるから, 理論的には  $r_{\kappa(3)}^{\dagger} = r_{\kappa(1)}^{\dagger} \times r_{\kappa(2)}^{\dagger}$  であるが, データに誤差があるときは上式で計算した  $r_{\kappa(1)}^{\dagger}$ ,  $r_{\kappa(2)}^{\dagger}$  が必ずしも厳密な正規直交系ではない . そこで平行投影の場合と同様に式 (27) のように特異値分解し, 回転行列  $R_{\kappa}$  を式 (28) で定める [5] .

### 【形状の計算】

式 (36) の行列  $\Pi_\kappa$  と式 (49) の行列  $R_\kappa$  の定義と式 (68) より, 6 節のステップ 9 で定義した行列  $M$  は式 (17) のように書ける. 3 次元形状ベクトルを  $s_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha)^\top$  と定義すると, 式 (6) は式 (64) のように書ける. これから最小二乗解が式 (18) で与えられる.

### 【鏡像解の計算】

平行投影の場合と同様に形状ベクトル  $s_\alpha$  に対して鏡像解  $-s_\alpha$  が存在する. そして  $m_{\kappa(a)}^\dagger$  の符号が変わることから式 (68) より  $\Pi_\kappa R_\kappa = -\Pi_\kappa R'_\kappa$  となる鏡像解  $R'_\kappa$  が発生する. 両辺を転置し,  $R'_\kappa R_\kappa^\top = \Omega_\kappa$  と置くと, この関係は次のように書ける.

$$\Omega_\kappa \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (79)$$

したがって  $\Omega_\kappa$  はベクトル  $(1, 0, 0)^\top$ ,  $(0, 1, 0)^\top$  をそれぞれ  $(-1, 0, 0)^\top$ ,  $(0, -1, 0)^\top$  に写像する回転行列であり,  $\Omega_\kappa = \text{diag}(-1, -1, 1)$  となる.

## C. 疑似透視投影モデル

疑似透視投影の式 (38) は, 投影行列  $\Pi$  を

$$\Pi = \frac{f}{t_z} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_x/t_z & t_x/f \\ 0 & 1 & -t_y/t_z & t_y/f \end{pmatrix} \quad (80)$$

と定義すると次のように書ける.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Pi \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ f \end{pmatrix} \quad (81)$$

### 【計量行列の計算】

式 (2) は次のように書きなおせる.

$$\begin{pmatrix} r_{\kappa\alpha} \\ f_\kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_\kappa \\ f_\kappa \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_\kappa \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j_\kappa \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_\kappa \\ 0 \end{pmatrix} \quad (82)$$

したがって, 式 (4) の  $\tilde{m}_{0\kappa}$ ,  $\tilde{m}_{1\kappa}$ ,  $\tilde{m}_{2\kappa}$ ,  $\tilde{m}_{3\kappa}$  は次のように書ける.

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{0\kappa} &= \Pi_\kappa \begin{pmatrix} t_\kappa \\ f_\kappa \end{pmatrix}, & \tilde{m}_{1\kappa} &= \Pi_\kappa \begin{pmatrix} i_\kappa \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{m}_{2\kappa} &= \Pi_\kappa \begin{pmatrix} j_\kappa \\ 0 \end{pmatrix}, & \tilde{m}_{3\kappa} &= \Pi_\kappa \begin{pmatrix} k_\kappa \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (83)$$

ただし  $\Pi_\kappa$  は式 (80) で  $f$ ,  $t_z$  をそれぞれ時刻  $\kappa$  の値  $f_\kappa$ ,  $t_{z\kappa}$  に置き換えたものである. 式 (49) の回転行列を  $R_\kappa$

を用いると次のように書ける.

$$\begin{pmatrix} \tilde{m}_{1\kappa} & \tilde{m}_{2\kappa} & \tilde{m}_{3\kappa} \end{pmatrix} = \Pi_\kappa \begin{pmatrix} R_\kappa \\ \mathbf{0}^\top \end{pmatrix} \quad (84)$$

$R_\kappa$  は直交行列であるから次の関係を得る.

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \tilde{m}_{1\kappa} & \tilde{m}_{2\kappa} & \tilde{m}_{3\kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{m}_{1\kappa} & \tilde{m}_{2\kappa} & \tilde{m}_{3\kappa} \end{pmatrix}^\top \\ &= \Pi_\kappa \begin{pmatrix} R_\kappa \\ \mathbf{0}^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_\kappa^\top & \mathbf{0}^\top \end{pmatrix} \Pi_\kappa^\top \\ &= \Pi_\kappa \begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix} \Pi_\kappa^\top \\ &= \frac{f_\kappa^2}{t_{z\kappa}^2} \begin{pmatrix} 1 + t_{x\kappa}^2/t_{z\kappa}^2 & t_{x\kappa}t_{y\kappa}/t_{z\kappa}^2 \\ t_{x\kappa}t_{y\kappa}/t_{z\kappa}^2 & 1 + t_{y\kappa}^2/t_{z\kappa}^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (85)$$

6 節のステップ 9 で定義したベクトル  $m_{\kappa(a)}^\dagger$  を用いると, 上式は次のように書ける.

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} m_{\kappa(1)}^\dagger & m_{\kappa(2)}^\dagger \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} m_{\kappa(1)}^\dagger & m_{\kappa(2)}^\dagger \end{pmatrix} \\ &= \frac{f_\kappa^2}{t_{z\kappa}^2} \begin{pmatrix} 1 + t_{x\kappa}^2/t_{z\kappa}^2 & t_{x\kappa}t_{y\kappa}/t_{z\kappa}^2 \\ t_{x\kappa}t_{y\kappa}/t_{z\kappa}^2 & 1 + t_{y\kappa}^2/t_{z\kappa}^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (86)$$

要素を取り出すと次のようになる.

$$\begin{aligned} \|m_{\kappa(1)}^\dagger\|^2 &= \frac{f_\kappa^2}{t_{z\kappa}^2} \left(1 + \frac{t_{x\kappa}^2}{f_\kappa^2}\right), \\ \|m_{\kappa(2)}^\dagger\|^2 &= \frac{f_\kappa^2}{t_{z\kappa}^2} \left(1 + \frac{t_{y\kappa}^2}{f_\kappa^2}\right), \\ (m_{\kappa(1)}^\dagger, m_{\kappa(2)}^\dagger) &= \frac{\tilde{t}_{x\kappa}\tilde{t}_{y\kappa}}{t_{z\kappa}^2} \end{aligned} \quad (87)$$

ただし, 式 (83) の第 1 式から次式が成り立つことを用いた.

$$\begin{pmatrix} \tilde{t}_{x\kappa} \\ \tilde{t}_{y\kappa} \end{pmatrix} = \frac{f_\kappa}{t_{z\kappa}} \begin{pmatrix} t_{x\kappa} \\ t_{y\kappa} \end{pmatrix} \quad (88)$$

式 (15) より  $M^\top = A^\top U^\top$  であるから, 6 節のステップ 4 のようにベクトル  $u_{\kappa(a)}^\dagger$  を定義すると,  $m_{\kappa(a)}^\dagger$  は式 (54) のように書ける. これを式 (87) に代入し,  $\alpha_\kappa$ ,  $\beta_\kappa$ ,  $\gamma_\kappa$  を式 (39) のように定義すると次のように書ける.

$$\begin{aligned} (A^\top u_{\kappa(1)}^\dagger, A^\top u_{\kappa(1)}^\dagger) &= \frac{f_\kappa^2}{\alpha_\kappa t_{z\kappa}^2}, \\ (A^\top u_{\kappa(2)}^\dagger, A^\top u_{\kappa(2)}^\dagger) &= \frac{f_\kappa^2}{\beta_\kappa t_{z\kappa}^2}, \\ (A^\top u_{\kappa(1)}^\dagger, A^\top u_{\kappa(2)}^\dagger) &= \frac{\gamma_\kappa f_\kappa^2}{t_{z\kappa}^2} \end{aligned} \quad (89)$$

変形して式 (11) の計量行列  $T$  を用いると次のようになる.

$$\begin{aligned} \alpha_\kappa (u_{\kappa(1)}^\dagger, T u_{\kappa(1)}^\dagger) &= \beta_\kappa (u_{\kappa(2)}^\dagger, T u_{\kappa(2)}^\dagger) \\ &= \frac{(u_{\kappa(1)}^\dagger, T u_{\kappa(2)}^\dagger)}{\gamma_\kappa} = \frac{f_\kappa^2}{t_{z\kappa}^2} \end{aligned} \quad (90)$$

これから次の二つの条件を得る．

$$\begin{aligned} \alpha_\kappa(\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger, \mathbf{T}\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger) &= \beta_\kappa(\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger, \mathbf{T}\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger) \\ \gamma_\kappa\left(\alpha_\kappa(\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger, \mathbf{T}\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger) + \beta_\kappa(\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger, \mathbf{T}\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger)\right) \\ &= 2(\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger, \mathbf{T}\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger) \end{aligned} \quad (91)$$

こうすれば  $\alpha_\kappa$  と  $\alpha_\beta$  に関する式の対称性が保存される．第2式で両辺に  $\gamma_\kappa$  を掛けているのは， $\tilde{t}_{x\kappa}$  または  $\tilde{t}_{y\kappa}$  が 0 となる場合に  $\gamma_\kappa = 0$  となるので，これが分母に来ないようにするためである．そして次の関数を最小にするように  $T$  を定める．

$$\begin{aligned} K &= \sum_{\kappa=1}^M \left[ \left( \alpha_\kappa(\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger, \mathbf{T}\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger) - \beta_\kappa(\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger, \mathbf{T}\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \gamma_\kappa \left( \alpha_\kappa(\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger, \mathbf{T}\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger) + \beta_\kappa(\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger, \mathbf{T}\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2(\mathbf{u}_{\kappa(1)}^\dagger, \mathbf{T}\mathbf{u}_{\kappa(2)}^\dagger) \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (92)$$

式 (40) のようにテンソル  $B = (B_{ijkl})$  を定義すると，上式は式 (75) のように書ける．弱透視投影の場合と同様に行列  $T = (T_{ij})$  にはスケールの不定性があるので  $\|T\| = 1$  と正規化しても一般性を失わない．

式 (23) のように  $6 \times 6$  対称行列  $B$  を定義すると， $T$  は対称行列であるから，式 (26) のように 6 次元ベクトル  $\tau$  を定義すると，上式は式 (76) のように書ける． $\|T\| = 1$  は  $\|\tau\| = 1$  と同値であり， $K$  を最小にする単位ベクトル  $\tau$  は  $B$  の最小固有値に対応する単位固有ベクトルである．これから式 (26) によって解  $T$  が得られる．ただし固有ベクトルは符号が未定であり， $T$  は半正值でなければならないから  $\det T < 0$  なら  $T$  の符号を換える．

#### 【並進ベクトルの計算】

計量行列  $T$  が定まれば，式 (90) から  $t_{z\kappa}$  が定まる．しかし最後の項は分母の  $\gamma_\kappa$  が 0 になる可能性があるので，最初の 2 項のみを用い，かつ式の対称性を保持するように式 (33) によって定める． $t_{z\kappa}$  が定まれば式 (88) より  $t_{x\kappa}$ ,  $t_{y\kappa}$  が式 (34) のように定まる．

#### 【回転行列の計算】

平行投影，弱透視投影の場合と同様に，式 (15) の行列  $M$  の第  $i$  列が式 (16) のように求まる．これからベクトル  $\mathbf{m}_{\kappa(a)}^\dagger$  も定まる．

式 (84) の両辺を転置し， $\mathbf{R}_\kappa^\top$  の第  $i$  列を  $\mathbf{r}_{\kappa(i)}^\dagger$  と置くと， $\mathbf{m}_{\kappa(a)}^\dagger$  の定義より次のように書ける．

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{m}_{\kappa(1)}^\dagger \quad \mathbf{m}_{\kappa(2)}^\dagger \right) &= \left( \mathbf{R}_\kappa^\top \quad \mathbf{0} \right) \Pi_\kappa^\top \\ &= \frac{f_\kappa}{t_{z\kappa}} \left( \mathbf{r}_{\kappa(1)}^\dagger - \frac{t_{x\kappa}}{t_{z\kappa}} \mathbf{r}_{\kappa(3)}^\dagger \quad \mathbf{r}_{\kappa(2)}^\dagger - \frac{t_{y\kappa}}{t_{z\kappa}} \mathbf{r}_{\kappa(3)}^\dagger \right) \end{aligned} \quad (93)$$

ゆえに次の関係を得る．

$$\begin{aligned} \frac{t_{z\kappa}}{f_\kappa} \mathbf{m}_{\kappa(1)}^\dagger &= \mathbf{r}_{\kappa(1)}^\dagger - \frac{t_{x\kappa}}{t_{z\kappa}} \mathbf{r}_{\kappa(3)}^\dagger, \\ \frac{t_{z\kappa}}{f_\kappa} \mathbf{m}_{\kappa(2)}^\dagger &= \mathbf{r}_{\kappa(2)}^\dagger - \frac{t_{y\kappa}}{t_{z\kappa}} \mathbf{r}_{\kappa(3)}^\dagger \end{aligned} \quad (94)$$

$\{\mathbf{r}_{\kappa(1)}^\dagger, \mathbf{r}_{\kappa(2)}^\dagger, \mathbf{r}_{\kappa(3)}^\dagger\}$  は右手系正規直交系であるから，両者のベクトル積は次のようになる．

$$\frac{t_{z\kappa}^2}{f_\kappa^2} \mathbf{m}_{\kappa(1)}^\dagger \times \mathbf{m}_{\kappa(2)}^\dagger = \mathbf{r}_{\kappa(3)}^\dagger + \frac{t_{x\kappa}}{t_{z\kappa}} \mathbf{r}_{\kappa(1)}^\dagger + \frac{t_{y\kappa}}{t_{z\kappa}} \mathbf{r}_{\kappa(2)}^\dagger \quad (95)$$

ゆえに  $\{\mathbf{r}_{\kappa(1)}^\dagger, \mathbf{r}_{\kappa(2)}^\dagger, \mathbf{r}_{\kappa(3)}^\dagger\}$  は次の連立 1 次方程式を解いて定まる．

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\kappa(1)}^\dagger - \frac{t_{x\kappa}}{t_{z\kappa}} \mathbf{r}_{\kappa(3)}^\dagger &= \frac{t_{z\kappa}}{f_\kappa} \mathbf{m}_{\kappa(1)}^\dagger, \\ \mathbf{r}_{\kappa(2)}^\dagger - \frac{t_{y\kappa}}{t_{z\kappa}} \mathbf{r}_{\kappa(3)}^\dagger &= \frac{t_{z\kappa}}{f_\kappa} \mathbf{m}_{\kappa(2)}^\dagger, \\ \frac{t_{x\kappa}}{t_{z\kappa}} \mathbf{r}_{\kappa(1)}^\dagger + \frac{t_{y\kappa}}{t_{z\kappa}} \mathbf{r}_{\kappa(2)}^\dagger + \mathbf{r}_{\kappa(3)}^\dagger &= \frac{t_{z\kappa}^2}{f_\kappa^2} \mathbf{m}_{\kappa(1)}^\dagger \times \mathbf{m}_{\kappa(2)}^\dagger \end{aligned} \quad (96)$$

これを解くと式 (42) が得られる．しかしデータに誤差があるときは上式で計算した  $\{\mathbf{r}_{\kappa(1)}^\dagger, \mathbf{r}_{\kappa(2)}^\dagger, \mathbf{r}_{\kappa(3)}^\dagger\}$  は必ずしも厳密な正規直交系ではない．そこで平行投影，弱透視投影の場合と同様に式 (43) のように特異値分解し，平行投影の場合と同様に回転行列  $\mathbf{R}_\kappa$  が式 (28) で定める．

#### 【形状の計算】

式 (44) の行列  $\Pi_\kappa$  と式 (49) の行列  $\mathbf{R}_\kappa$  の定義と式 (84) より，6 節のステップ 9 で定義した行列  $M$  は式 (17) のように書ける．そして平行投影，弱透視投影の場合と同様に式 (18) の最小二乗解が得られる．

#### 【鏡像解の計算】

平行投影，弱透視投影の場合と同様に形状ベクトル  $s_\alpha$  に対して鏡像解  $-s_\alpha$  が存在する．そして  $\mathbf{m}_{\kappa(a)}^\dagger$  の符号が変わることから式 (84) より  $\Pi_\kappa \begin{pmatrix} \mathbf{R}_\kappa \\ \mathbf{0}^\top \end{pmatrix} = -\Pi_\kappa \begin{pmatrix} \mathbf{R}'_\kappa \\ \mathbf{0}^\top \end{pmatrix}$  となる鏡像解  $\mathbf{R}'_\kappa$  が発生する．両辺を転置し， $\mathbf{R}'_\kappa \mathbf{R}_\kappa^\top = \Omega_\kappa$  と置くと，この関係は次のように書ける．

$$\begin{aligned} \Omega_\kappa &\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -t_{x\kappa}/t_{z\kappa} & -t_{y\kappa}/t_{z\kappa} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ t_{x\kappa}/t_{z\kappa} & t_{y\kappa}/t_{z\kappa} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (97)$$

したがって  $\Omega_\kappa$  はベクトル  $(1, 0, -t_{x\kappa}/t_{z\kappa})^\top$ ,  $(0, 1, -t_{y\kappa}/t_{z\kappa})^\top$  をそれぞれ  $(-1, 0, t_{x\kappa}/t_{z\kappa})^\top$ ,  $(0, -1, t_{y\kappa}/t_{z\kappa})^\top$  に写像する回転行列である．ベクトル  $\mathbf{t}_\kappa = (t_{x\kappa}, t_{y\kappa}, t_{z\kappa})^\top$  が  $(1, 0, -t_{x\kappa}/t_{z\kappa})^\top$ ,  $(0, 1, -t_{y\kappa}/t_{z\kappa})^\top$  の両方に直交することから， $\Omega_\kappa$  は  $\mathbf{t}_\kappa$  を軸とし，回転角  $180^\circ$  の回転行列である．これは式 (45) のようになる．