

## 平面シーンの最適三角測量

矢野直樹<sup>†1</sup> 金谷健一<sup>†1</sup>

2 画像間の対応点から、その点がある平面上に載っているという知識を用いてその 3 次元位置を最適に計算する方法を示す。これを平面やカメラ配置が既知の場合とそれらが未知の場合とに分けて示すが、両者は密接に関連している。具体的には、平面やカメラ配置を指定する画像間の射影変換が既知の場合は 3 次元位置を反復によって計算し、射影変換が未知の場合はその反復過程でその推定を反復的に更新することによって射影変換を最適化に推定する。シミュレーションによると従来方法との差が非常に小さいことが示されるが、本論文は厳密な理論に基づいているので、従来手法の解を理論的な最適解と比較するために欠かせない。

### Optimal Planar Scene Triangulation

NAOKI YANO<sup>†1</sup> and KENICHI KANATANI<sup>†1</sup>

We present a new algorithm for optimally computing from point correspondences over two images their 3-D positions by using the knowledge that the points are on a planar surface. We consider two cases: the case in which the plane and the camera configuration are known and the case in which they are not. These two cases are closely related: If the homography between the two images determined by the plane and the camera configuration is known, we iteratively compute the 3-D positions of points, while if the homography is not known, we iteratively update it in the course of the iterations, resulting in an optimal estimate. Our simulation shows that the accuracy is almost the same as existing methods, but our method is guaranteed to be theoretically optimal and hence is indispensable for comparing the performance of existing methods.

#### 1. ま え が き

2 画像の対応点からその 3 次元位置を計算することは「三角測量」と呼ばれ、それ自体が非常に実用的な問題であるだけでなく、さまざまなコンピュータビジョンによる 3 次元認識

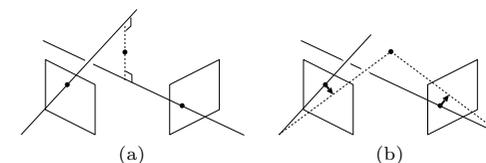


図 1 三角測量の原理。(a) 視線を最短に結ぶ線分の中点。(b) 視線が交わるように補正する。

の基礎となる<sup>2)</sup>。原理的には 2 台のカメラのレンズ中心（「視点」）と画像上の対応点を通る 2 本の直線（「視線」）の交点を計算すればよいが、画像処理による対応点抽出の誤差により視線が 1 点で交わるとは限らない。古くから用いられていた発見的な方法はその 2 本の視線を最短距離で結ぶ線分の中点をとることである（「中点法」図 1(a)）。しかし、1990 年代にこれが最善ではなく、画像上で対応点をそれぞれ視線が交わる位置に移動させ、これをその移動量を最小にするべきであることが金谷<sup>7),8)</sup> および Hartley ら<sup>3)</sup> によって指摘され（図 1(b)）、それぞれ異なる計算が提案された。Hartley ら<sup>3)</sup> は問題を 6 次方程式の解の計算に帰着させ、川島ら<sup>15)</sup> は補正量の第 1 近似の解析的な公式を与えた。最近、金谷ら<sup>12)</sup> は反復によって高次の項まで計算すれば Hartley ら<sup>3)</sup> の方法と同一の解がより高速に計算されることを指摘した。

本論文では着目する 3 次元点が平面上にある場合を考える。人工物や都市などのシーンでは平面から構成される対象物が多いので、これは非常に応用範囲が広い。この場合は 2 本の視線が交わるだけでなく、その交点があるという条件が必要となる。以下、これを Chum ら<sup>1)</sup> にならって「平面三角測量」と呼ぶ。これについても第 1 近似の理論は金谷<sup>7),8)</sup> や金澤ら<sup>13)</sup> によって完成している。一方、Chum ら<sup>1)</sup> は問題を 8 次方程式の解の計算に帰着させた。本論文では金谷<sup>7),8)</sup> や金澤ら<sup>13)</sup> らの方法を反復して高次の項まで厳密に計算する方法を提案する。本論文では次の二つの場合を考える。

- 平面やカメラ配置が既知の場合
- 平面やカメラ配置が未知の場合

Chum ら<sup>1)</sup> の方法は前者にしか対処できない。しかし、提案方法は後者を自動的に包含している。まず平面の 2 画像への投影と 2 画像間の射影変換についてまとめ、本論文の解析に適した定式化を与える。そして、平面やカメラ配置が定める画像間の射影変換が既知の場合の最適な平面三角測量の手順を示す。これが本論文の第 1 のオリジナリティである。

次に、平面やカメラ配置が未知の場合を考え、画像間の射影変換を未知とし、平面を仮定

<sup>†1</sup> 岡山大学大学院自然科学研究科  
Department of Computer Science, Okayama University, Japan

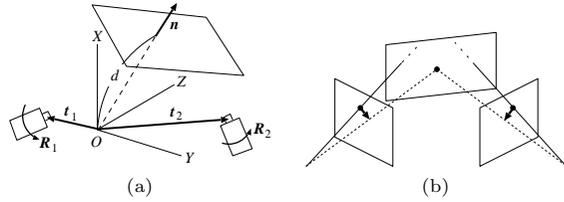


図 2 (a) 平面とカメラの配置 . (b) 視線が平面上で交わるように補正する .

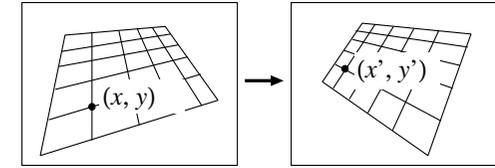


図 3 同一平面を撮影した 2 画像間は射影変換で結ばれる .

する三角測量を反復することによって射影変換自体を推定する . これがこの論文の第 2 のオリジナリティである .

最後にシミュレーションを行い , 結果として従来の方法との差が非常に小さいことが示す . しかし , 本論文は厳密な理論に基づいているので , 従来手法の解を理論的な最適解と比較するためには本論文の方法が不可欠である .

## 2. 平面による射影変換

本論文で用いる用語と記号を述べる . シーンに固定した  $XYZ$  座標に関して , 原点から距離が  $d$  , 単位法線ベクトル  $n$  の平面が存在するとする ( 図 2(a) ) . 空間の位置ベクトルを  $r = (X, Y, Z)^T$  と書くと平面の方程式は  $(n, r) = d$  となる<sup>9)</sup> . ただし , 以下ベクトル  $a, b$  の内積を  $(a, b)$  と書く .  $\{n, d\}$  をこの平面の「平面パラメータ」と呼ぶ .

視点が座標原点にあり , 焦点距離が  $f_0$  (画素) で光軸が  $Z$  軸に一致する仮想的なカメラを考え , それを「標準カメラ」と呼ぶ ( 実験では  $f_0 = 600$  画素とした ) . 今 2 台のカメラが配置され , 第 1 カメラは標準カメラを原点の周りに  $R_1$  (回転行列) だけ回転し ,  $t_1$  だけ平行移動し , さらに焦点距離を  $f_1$  に変えたものであり , 第 2 カメラは標準カメラを原点の周りに  $R_2$  だけ回転し ,  $t_2$  だけ平行移動し , 焦点距離を  $f_2$  に変えたものであるとする ( 図 2(b) ) .  $\{t_1, R_1\}, \{t_2, R_2\}$  を各カメラの「運動パラメータ」と呼ぶ . このとき , シーンの平面を第 1 カメラで撮影した画像 ( 以下「第 1 画像」) と第 2 カメラで撮影した画像 ( 以下「第 2 画像」) とは次の「射影変換」で結ばれる<sup>8)</sup> .

$$x' = f_0 \frac{h_{11}x + h_{12}y + h_{13}f_0}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}f_0}, \quad y' = f_0 \frac{h_{21}x + h_{22}y + h_{23}f_0}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}f_0} \quad (1)$$

これは第 1 画像上の点  $(x, y)$  と上式により計算される第 2 画像上の点  $(x', y')$  とが同一の 3 次元点の像であるという意味である . 係数  $h_{ij}$  は平面パラメータ  $\{n, d\}$  , 2 台のカメラの

運動パラメータ  $\{R_1, t_1\}, \{R_2, t_2\}$  , および焦点距離  $f_1, f_2$  によって定まる . 係数を  $3 \times 3$  行列  $H = (h_{ij})$  ( 以下 , これを単に「射影変換」と呼ぶ ) で表すと次のように書ける<sup>8)</sup> ( $I$  は単位行列 ,  $\text{diag}(a, b, c)$  は  $a, b, c$  をこの順に対角要素とする対角行列) .

$$H = \text{diag}(1, 1, \frac{f_0}{f_2}) R_2^T (I - \frac{t_2 n^T}{d}) (I + \frac{t_1 n^T}{d - (t_1, n)}) R_1 \text{diag}(1, 1, \frac{f_1}{f_0}) \quad (2)$$

## 3. 平面とカメラ配置が 既知の場合の平面三角測量

平面パラメータ  $\{n, d\}$  , 運動パラメータ  $\{R_1, t_1\}, \{R_2, t_2\}$  , および焦点距離  $f_1, f_2$  が既知 , したがって射影変換  $H$  も既知とする . よく知られているように , 同次座標を用いれば式 (1) が次のように書き直せる<sup>2), 8)</sup> .

$$\begin{pmatrix} x'/f_0 \\ y'/f_0 \\ 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x/f_0 \\ y/f_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

記号  $\cong$  は両辺が非零の定数倍を除いて等しいことを表す . 上式は両辺が平行であることを意味するので , 次のように書き直せる .

$$\begin{pmatrix} x'/f_0 \\ y'/f_0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x/f_0 \\ y/f_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

上式の左辺のベクトルの 3 成分を取り出して  $f_0^2$  倍すると次の 3 式を得る .

$$(\xi^{(1)}, h) = 0, \quad (\xi^{(2)}, h) = 0, \quad (\xi^{(3)}, h) = 0 \quad (5)$$

ただし , 9 次元ベクトル  $h, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}$  を次のように定義する .

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -f_0x \\ -f_0y \\ -f_0^2 \\ xy' \\ yy' \\ f_0y' \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} f_0x \\ f_0y \\ f_0^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -xx' \\ -yy' \\ -f_0x' \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}^{(3)} = \begin{pmatrix} -xy' \\ -yy' \\ -f_0y' \\ xx' \\ yx' \\ f_0x' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

4次元ベクトル  $\mathbf{p} = (x, y, x', y')^\top$  を用いると, 対応点の組  $(x, y), (x', y')$  を4次元  $xyx'y'$  空間の1点  $\mathbf{p}$  と同一視できる. 式(6)のベクトル  $\boldsymbol{\xi}^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, 3$  は  $\mathbf{p}$  の関数であるから  $\boldsymbol{\xi}^{(k)}(\mathbf{p})$  と書ける. 式(5)の3式はそれぞれこの4次元空間の超曲面を表す. しかし, 3式は代数的には従属<sup>\*1</sup>であり, それらの交わりは2次元(代数)多様体  $S$  を定義する.

対応点検出に誤差があれば点  $\mathbf{p}$  は厳密にはこの多様体  $S$  上に載らない. 三角測量とは  $\mathbf{p}$  が  $S$  上に載るように最小に移動することである. 式で書くと, 条件

$$(\boldsymbol{\xi}^{(k)}(\mathbf{p}), \mathbf{h}) = 0, \quad k = 1, 2, 3 \quad (7)$$

のもとで「再投影誤差」

$$E = \|\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}}\|^2 \quad (8)$$

が最小になるような  $\bar{\mathbf{p}}$  を求める問題となる. そのような  $\bar{\mathbf{p}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}', \bar{y}')^\top$  が得られると, 対応する3次元位置  $(X, Y, Z)$  は次の式を解くことによって定まる.

$$\begin{pmatrix} x/f_0 \\ y/f_0 \\ 1 \end{pmatrix} \cong \mathbf{P}_1 \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'/f_0 \\ y'/f_0 \\ 1 \end{pmatrix} \cong \mathbf{P}_2 \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

ただし,  $3 \times 4$  行列  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  は次のように定義される「投影行列」である<sup>2),12)</sup>.

$$\mathbf{P}_1 = \text{diag}(1, 1, \frac{f_0}{f_1}) \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1^\top & -\mathbf{R}_1 \mathbf{t}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \text{diag}(1, 1, \frac{f_0}{f_2}) \begin{pmatrix} \mathbf{R}_2^\top & -\mathbf{R}_2 \mathbf{t}_2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

式(9)から未知数  $X, Y, Z$  に関する4個の線形方程式が得られるが, 式(7)が満たされることから唯一の解が存在することが保証される<sup>12)</sup>.

\*1  $x'\boldsymbol{\xi}^{(1)} + y'\boldsymbol{\xi}^{(2)} + f_0\boldsymbol{\xi}^{(3)} = \mathbf{0}$  が恒等的に成り立つ.

#### 4. 平面三角測量の最適計算

式(7)のもとで式(8)を最小化する手順を示す. これが本論文の第1のオリジナルな成果である. 一般の三角測量<sup>12)</sup>では満たすべき条件(拘束)は一つの式(エッジ極線方程式)であったが, 平面の場合は式(7)の3式であり, しかもこれらは代数的に従属である. そこで一般の場合の解法を(独立でない)多拘束に拡張する. これは金谷<sup>7),8)</sup>や金澤<sup>13)</sup>らが行ったが, 彼らの方法は高次の項を省略した第1近似であった. ここでは反復によって高次の項まで補正して式(8)を厳密に最小化する手順を示す(導出は付録). 射影変換  $H$  を既知としているので, 式(6)のベクトル表示  $\mathbf{h}$  も既知である.

(1)  $E_0 = \infty$  (十分大きい値)とし, 次のように定義する.

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{x}' \\ \hat{y}' \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \end{pmatrix} \quad (11)$$

そして,  $\hat{x} = x, \hat{y} = y, \hat{x}' = x', \hat{y}' = y', \tilde{x} = \tilde{y} = \tilde{x}' = \tilde{y}' = 0$  とする.

(2) 次の  $9 \times 4$  行列  $\mathbf{T}^{(1)}, \mathbf{T}^{(2)}, \mathbf{T}^{(3)}$  を計算する.

$$\mathbf{T}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{y}' & 0 & 0 & \hat{x} \\ 0 & \hat{y}' & 0 & \hat{y} \\ 0 & 0 & 0 & f_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{(2)} = \begin{pmatrix} f_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\hat{x}' & 0 & -\hat{x} & 0 \\ 0 & -\hat{x}' & -\hat{y} & 0 \\ 0 & 0 & -f_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{(3)} = \begin{pmatrix} -\hat{y}' & 0 & 0 & -\hat{x} \\ 0 & -\hat{y}' & 0 & -\hat{y} \\ 0 & 0 & 0 & -f_0 \\ \hat{x}' & 0 & \hat{x} & 0 \\ 0 & \hat{x}' & \hat{y} & 0 \\ 0 & 0 & f_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

(3) 次の  $\boldsymbol{\xi}^{(1)*}, \boldsymbol{\xi}^{(2)*}, \boldsymbol{\xi}^{(3)*}$  を計算する.

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -f_0\hat{x} \\ -f_0\hat{y} \\ -f_0^2 \\ \hat{x}\hat{y}' \\ \hat{y}\hat{y}' \\ f_0\hat{y}' \end{pmatrix} + \mathbf{T}^{(1)}\tilde{\mathbf{p}}, \quad \boldsymbol{\xi}^{(2)*} = \begin{pmatrix} f_0\hat{x} \\ f_0\hat{y} \\ f_0^2 \\ 0 \\ 0 \\ -\hat{x}\hat{x}' \\ -\hat{y}\hat{x}' \\ -f_0\hat{x}' \end{pmatrix} + \mathbf{T}^{(2)}\tilde{\mathbf{p}}, \quad \boldsymbol{\xi}^{(3)*} = \begin{pmatrix} -\hat{x}\hat{y}' \\ -\hat{y}\hat{y}' \\ -f_0\hat{y}' \\ \hat{x}\hat{x}' \\ \hat{y}\hat{x}' \\ f_0\hat{x}' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{T}^{(3)}\tilde{\mathbf{p}} \quad (13)$$

(4) 次の  $9 \times 9$  行列  $V_0^{(kl)}[\xi]$  を計算する .

$$V_0^{(kl)}[\xi] = T^{(k)}T^{(l)\top} \quad (14)$$

(5) 次の  $3 \times 3$  行列  $W = (W^{(kl)})$  を計算する ( $(\cdot)_r^-$  はランク  $r$  の一般逆行列) .

$$W = \begin{pmatrix} (h, V_0^{(11)}[\xi]h) & (h, V_0^{(12)}[\xi]h) & (h, V_0^{(13)}[\xi]h) \\ (h, V_0^{(21)}[\xi]h) & (h, V_0^{(22)}[\xi]h) & (h, V_0^{(23)}[\xi]h) \\ (h, V_0^{(31)}[\xi]h) & (h, V_0^{(32)}[\xi]h) & (h, V_0^{(33)}[\xi]h) \end{pmatrix}_2 \quad (15)$$

(6)  $\tilde{p}, \hat{p}$  を次のように更新する .

$$\tilde{p} = \sum_{k,l=1}^3 W^{(kl)}(\xi^{(l)*}, h)T^{(k)\top}h, \quad \hat{p} \leftarrow p - \tilde{p} \quad (16)$$

(7) 再投影誤差  $E$  を次のように計算する .

$$E = \|\tilde{p}\|^2 \quad (17)$$

$E \approx E_0$  なら  $\hat{p}$  を  $\tilde{p}$  として返して終了する . そうでなければ,  $E_0 \leftarrow E$  と更新してステップ (2) に戻る .

式 (15) でランク 2 の一般逆行列を計算しているのは, 式 (5) の 3 個の拘束の二つしか独立ではないことに対応する .

## 5. 平面とカメラ配置が未知の場合の平面三角測量

次に平面パラメータ  $\{n, d\}$ , 運動パラメータ  $\{R_1, t_1\}, \{R_2, t_2\}$ , および焦点距離  $f_1, f_2$  が未知の場合を考える . これらに対応点のみから計算できればよいが, 未知数が多すぎて一意には定まらない . しかし焦点距離  $f_1, f_2$  が既知であれば未知数と方程式数が一致する . そこで焦点距離は参照パターンなどを用いるカメラ校正によって定めるとして,  $f_1, f_2$  を既知とする . ただし  $XYZ$  座標系はシーン中のどこにあってもよいので, その絶対的な位置が定まらない . そこで第 1 カメラの視点を原点  $O$  とし, その光軸を  $Z$  軸とし, 第 1 カメラの運動パラメータを  $\{I, 0\}$  とする . そして, 第 2 カメラの運動パラメータを  $\{R, t\}$  とする . さらに画像を用いる限り空間での絶対的なスケールが不定なので (遠くの大きな物体と近くの小さな物体が区別できない),  $\|t\| = 1$  と正規化する .

平面パラメータ  $\{n, d\}$  と  $\{R, t\}$  を求めるには 2 画像間の射影変換  $H$  を計算すればよい . その計算法は次節に述べるが, 先に射影変換  $H$  が求まったとして  $\{n, d\}, \{R, t\}$  を

計算する方法を述べる . これは古くからよく知られおり<sup>\*1</sup>, 次のようになる .

(1) 行列  $\tilde{H}$  を次のように定義する .

$$\tilde{H} = \text{diag}(1, 1, \frac{f_2}{f_0})H\text{diag}(1, 1, \frac{f_0}{f_1}) \quad (18)$$

(2) 行列  $\tilde{H}$  を  $\det[\tilde{H}] = 1$  に正規化する .

$$\tilde{H} \leftarrow \frac{\tilde{H}}{\sqrt[3]{\det[\tilde{H}]}} \quad (19)$$

(3) 行列  $\tilde{H}$  を次のように特異値分解する ( $U, V$  は直交行列) .

$$\tilde{H} = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{pmatrix} V^\top \quad (20)$$

(4) 行列  $V$  の列を  $v_1, v_2, v_3$  とするとき,  $n, d$  は次のようになる .

$$n = \mathcal{N}[\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}v_1 \pm \sqrt{\sigma_2^2 - \sigma_3^2}v_3], \quad d = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (21)$$

ただし  $\mathcal{N}[\cdot]$  は単位ベクトルへの正規化である ( $\mathcal{N}[a] = a/\|a\|$ ) .

(5)  $t$  と  $R$  が次のように計算できる .

$$t = \mathcal{N}[-\sigma_3\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}v_1 \pm \sigma_1\sqrt{\sigma_2^2 - \sigma_3^2}v_3], \quad R = \frac{1}{\sigma_2}(I + \frac{\sigma_2^3 nt^\top}{d})\tilde{H}^\top \quad (22)$$

ただし, 式 (21), (22) の  $\pm$  は複号同順である .

(6) 求めた解に対して,  $n$  と  $t$  の符号を同時に換えたものも解である .

このようにして  $t, R, d, n$  の 4 組の解が得られるが, その内の二つずつは同じ平面とカメラ位置を表すので, 実質的には二種類の解が存在する . しかし, 普通はその一つは非常に不自然な解であり, 実際の応用では正しい解を選ぶのは容易である . 例えば平面の作る消失線 (画像フレーム中には存在しないかも知れない) が一般に画像面を二分するが, 画像原点が平面の像のある側にあれば (普通の場合はそうなる), ベクトル  $R_1^\top n/d, R_2^\top n/d$  の  $Z$  成分が共に正であるものを求めることによってほとんどの場合正しい解となる . それでも定まらなければ, 前節のようにして各特徴点の 3 次元を復元して, すべての点が両方のカメラの前方にあるかどうかで判定する<sup>8)</sup> .

\*1 最も古いのは 1966 年の心理学者 Hay<sup>4)</sup> であり, コンピュータビジョンの分野では 1980 年代に Tsai<sup>ら<sup>21)-23)</sup></sup> および Longuet-Higgins<sup>16)</sup> によって解析された . 導出や解析は教科書 2), 5), 8) 参照 .

## 6. 射影変換の最適な計算法

前節より，問題は2画像間の対応点の組から射影変換  $H$  を計算することに帰着する．そのために我々は前報<sup>18)</sup> でそれまでの「くりこみ法」<sup>14),20)</sup> に代わる「多拘束 FNS 法」を発表した．これは再投影誤差を近似する「Sampson 誤差」を最小化するものである．ここでは厳密に再投影誤差を最小化する方法を述べる．これが本論文の第2のオリジナルな成果である．

再投影誤差の最小化と Sampson 誤差の最小化は楕円当てはめや基礎行列の計算において解に実質的に差がないことが示されている<sup>10),17)</sup>．このため射影変換の計算でも差がないと予想されるが，確認のために検証する．厳密な再投影誤差の最小化法は金谷ら<sup>11)</sup> が一般理論を示したが，これは拘束式が一つの場合である．本論文ではこれを多拘束に拡張する．一般論<sup>11)</sup> に従えば，4節の三角測量と Sampson 誤差最小化を組合せて反復すればよい．2画像間の対応点を  $(x_\alpha, y_\alpha), (x'_\alpha, y'_\alpha), \alpha = 1, \dots, N$  とすると，最終的な手順は次のようになる．

- (1)  $E_0 = \infty$  (十分大きい値) とし，式(6)の  $h$  の初期値を計算する (例えば最小二乗法，あるいは前報<sup>19)</sup> の代数的解法)．
- (2) 4次元ベクトル  $p_\alpha, \hat{p}_\alpha, \tilde{p}_\alpha$  を次のように定義する ( $\alpha = 1, \dots, N$ ) ．

$$p_\alpha = \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ x'_\alpha \\ y'_\alpha \end{pmatrix}, \quad \hat{p}_\alpha = \begin{pmatrix} \hat{x}_\alpha \\ \hat{y}_\alpha \\ \hat{x}'_\alpha \\ \hat{y}'_\alpha \end{pmatrix}, \quad \tilde{p}_\alpha = \begin{pmatrix} \tilde{x}_\alpha \\ \tilde{y}_\alpha \\ \tilde{x}'_\alpha \\ \tilde{y}'_\alpha \end{pmatrix} \quad (23)$$

そして， $\hat{x}_\alpha = x_\alpha, \hat{y}_\alpha = y_\alpha, \hat{x}'_\alpha = x'_\alpha, \hat{y}'_\alpha = y'_\alpha, \tilde{x}_\alpha = \tilde{y}_\alpha = \tilde{x}'_\alpha = \tilde{y}'_\alpha = 0$  とする．

- (3) 式(12)の  $T^{(1)}, T^{(2)}, T^{(3)}$  の行列要素の  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{x}', \hat{y}'$  を  $\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha, \hat{x}'_\alpha, \hat{y}'_\alpha$  としたものをそれぞれ  $T_\alpha^{(1)}, T_\alpha^{(2)}, T_\alpha^{(3)}$  とする ( $\alpha = 1, \dots, N$ ) ．
- (4) 次の  $9 \times 9$  行列  $V_0^{(kl)}[\xi_\alpha]$  を計算する ( $\alpha = 1, \dots, N$ ) ．

$$V_0^{(kl)}[\xi_\alpha] = T_\alpha^{(k)} T_\alpha^{(l)\top} \quad (24)$$

- (5) 次の  $3 \times 3$  行列  $W_\alpha = (W_\alpha^{(kl)})$  を計算する ( $\alpha = 1, \dots, N$ ) ．

$$W_\alpha = \begin{pmatrix} (h, V_0^{(11)}[\xi_\alpha]h) & (h, V_0^{(12)}[\xi_\alpha]h) & (h, V_0^{(13)}[\xi_\alpha]h) \\ (h, V_0^{(21)}[\xi_\alpha]h) & (h, V_0^{(22)}[\xi_\alpha]h) & (h, V_0^{(23)}[\xi_\alpha]h) \\ (h, V_0^{(31)}[\xi_\alpha]h) & (h, V_0^{(32)}[\xi_\alpha]h) & (h, V_0^{(33)}[\xi_\alpha]h) \end{pmatrix}_2 \quad (25)$$

- (6) 次の  $\xi_\alpha^{(1)*}, \xi_\alpha^{(2)*}, \xi_\alpha^{(3)*}$  を計算する ( $\alpha = 1, \dots, N$ ) ．

$$\xi_\alpha^{(1)*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -f_0 \hat{x}_\alpha \\ -f_0 \hat{y}_\alpha \\ -f_0^2 \\ \hat{x}_\alpha \hat{y}'_\alpha \\ \hat{y}_\alpha \hat{x}'_\alpha \\ f_0 \hat{y}'_\alpha \end{pmatrix} + T_\alpha^{(1)} \tilde{p}_\alpha, \quad \xi_\alpha^{(2)*} = \begin{pmatrix} f_0 \hat{x}_\alpha \\ f_0 \hat{y}_\alpha \\ f_0^2 \\ 0 \\ 0 \\ -\hat{x}_\alpha \hat{x}'_\alpha \\ -\hat{y}_\alpha \hat{x}'_\alpha \\ -f_0 \hat{x}'_\alpha \end{pmatrix} + T_\alpha^{(2)} \tilde{p}_\alpha, \quad \xi_\alpha^{(3)*} = \begin{pmatrix} -\hat{x}_\alpha \hat{y}'_\alpha \\ -\hat{y}_\alpha \hat{y}'_\alpha \\ -f_0 \hat{y}'_\alpha \\ \hat{x}_\alpha \hat{x}'_\alpha \\ \hat{y}_\alpha \hat{x}'_\alpha \\ f_0 \hat{x}'_\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + T_\alpha^{(3)} \tilde{p}_\alpha \quad (26)$$

- (7) 次式を最小にする9次元単位ベクトル  $h$  を計算する．

$$J = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l=1}^3 W_\alpha^{(kl)} (\xi_\alpha^{(k)*}, h) (\xi_\alpha^{(l)*}, h) \quad (27)$$

- (8)  $\tilde{p}_\alpha, \hat{p}_\alpha$  を次のように更新する ( $\alpha = 1, \dots, N$ ) ．

$$\tilde{p}_\alpha = \sum_{k,l=1}^3 W_\alpha^{(kl)} (\xi_\alpha^{(l)*}, h) T_\alpha^{(k)\top} h, \quad \hat{p}_\alpha \leftarrow p_\alpha - \tilde{p}_\alpha \quad (28)$$

- (9) 再投影誤差  $E$  を次のように計算する．

$$E = \sum_{\alpha=1}^N \|\tilde{p}_\alpha\|^2 \quad (29)$$

$E \approx E_0$  なら  $\hat{p}_\alpha$  を  $\tilde{p}_\alpha$  として返して終了する．そうでなければ， $E_0 \leftarrow E$  と更新してステップ(3)に戻る．

式(27)は右辺の  $\xi_\alpha^{(k)*}, \xi_\alpha^{(l)*}$  がそれぞれ  $\xi_\alpha^{(k)}, \xi_\alpha^{(l)}$  (式(6)で  $x, y, x', y'$  に  $x_\alpha, y_\alpha, x'_\alpha, y'_\alpha$  を代入したもの) のとき「Sampson 誤差」と呼ばれ，これを最小にする方法として前報<sup>18)</sup> では「多拘束 FNS 法」を提案した．式(27)では  $\xi_\alpha^{(k)}, \xi_\alpha^{(l)}$  が  $\xi_\alpha^{(k)*}, \xi_\alpha^{(l)*}$  になっているだけであるから，やはり多拘束 FNS 法で最小化できる．このように Sampson 誤差最小化を反復することによって再投影誤差を厳密に最小化することができるというのが金谷ら<sup>11)</sup> の理論である．

上記の計算は単に4節の平面三角測量に射影変換  $h$  の更新(ステップ(7))を追加したものである．このように，我々の最適な平面三角測量は自動的に最適な射影変換の計算法を内包している．一方，Chum ら<sup>1)</sup> の8次方程式の方法にはそのような性質はない．これは金谷ら<sup>12)</sup> の最適な一般三角測量が自動的に金谷ら<sup>10)</sup> の最適な基礎行列の計算法を内包していることに対応する．一方，Hartley ら<sup>3)</sup> の8次方程式の方法にはそのような性質はない．

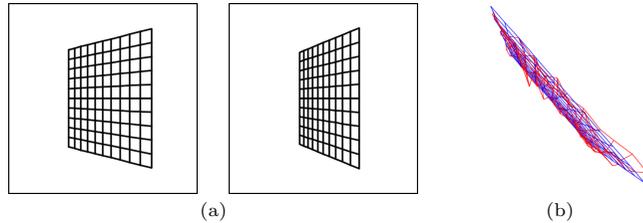


図 4 (a) 平面格子を 2 方向から撮影したシミュレーション画像 . (b) 3 次元復元した格子の位置 . 平面三角測量の結果 (青い格子) は指定した平面上にあるが , 一般の三角測量の結果 (赤い格子) では必ずしも載らない .

表 1 図 4(a) の格子点の補正後の再投影誤差 , その理論的期待値 , および復元した 3 次元位置の誤差 .

	再投影誤差	理論的期待値	3 次元復元誤差
一般三角測量 <sup>12)</sup>	1.99503	2.00000	4.24466
平面三角測量 (第 1 近似)	2.83127	—	0.95937
平面三角測量 (厳密計算)	2.83124	2.82843	0.95935

## 7. 実 験

図 4(a) は平面格子を 2 方向から撮影したことを想定したシミュレーション画像 (500 × 500 画素) である . 焦点距離は  $f_1 = f_2 = 600$  (画素) とした . 画像中の  $N (= 121)$  個の格子点を特徴点とし ,  $x, y$  座標に独立に期待値 0 , 標準偏差 2 画素の正規乱数誤差を加えてデータとした . これに対して平面性を考慮しない一般の三角測量<sup>12)</sup> と本論文の平面三角測量を行い , 3 次元空間に復元した格子を図 4(b) に示す . 平面三角測量では復元点が指定した平面上にあるが , 一般の三角測量では必ずしも載らない .

次に誤差を定量的に評価する . データ点を  $(x_\alpha, y_\alpha), (x'_\alpha, y'_\alpha)$  , それらを補正して点を  $(\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha), (\hat{x}'_\alpha, \hat{y}'_\alpha)$  とするとき , 次の (平方平均) 再投影誤差  $e$  を計算する .

$$e = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \left( (\hat{x}_\alpha - x_\alpha)^2 + (\hat{y}_\alpha - y_\alpha)^2 + (\hat{x}'_\alpha - x'_\alpha)^2 + (\hat{y}'_\alpha - y'_\alpha)^2 \right)} \quad (30)$$

また各点の復元した 3 次元位置を  $\hat{r}_\alpha$  , その真の位置を  $\bar{r}_\alpha$  とするとき , 3 次元位置の誤差  $D$  を次のように評価した .

$$D = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \|\hat{r}_\alpha - \bar{r}_\alpha\|^2} \quad (31)$$

表 1 はこれらを平面性を考慮しない一般三角測量<sup>12)</sup> , 平面性を考慮した三角測量の従来



図 5 平面パラメータと運動パラメータを推定して計算した 3 次元復元した格子 (赤) とその真の位置 (黒) .

表 2 図 4(a) の格子点の , 平面パラメータと運動パラメータを推定して補正した再投影誤差 , その理論的期待値 , および復元した 3 次元位置の誤差 .

	再投影誤差	理論的期待値	3 次元復元誤差
平面が既知	2.83124	2.82843	0.01919
平面が未知 (第 1 近似)	2.81321	—	0.13643
平面が未知 (厳密計算)	2.81323	2.78128	0.13660

の第 1 近似<sup>7),8),13)</sup> , および本論文の最適な平面三角測量の結果を示したものである . これから分かるように , 平面性を仮定するとそうでない場合に比べて再投影誤差が増加する . これは各対応点を視線が交わる (エッジ線方程式が満たされる) だけでなく , 復元点が指定した平面上に載るという余計な条件を課したため , 対応点をより大きく補正しなければならないからである . 画像上の各点の各座標の誤差の標準偏差が  $\sigma$  (画素) のとき , 統計学によれば最尤推定を行った場合 ,  $Ne^2/\sigma^2$  が一般の場合は自由度  $N$  の  $\chi^2$  分布に従い , 平面三角測量では  $2N$  の  $\chi^2$  分布に従うので , 期待値はそれぞれ  $N, 2N$  である . したがって再投影誤差  $e$  はそれぞれほぼ  $\sigma, \sqrt{2}\sigma$  となる . 表 1 の値もそれに近い . もちろん再投影誤差が大きいからといって 3 次元復元の精度が低下するわけではない . 平面性を考慮したために 3 次元位置の誤差が減少している . また第 1 近似と厳密な計算では値はほぼ同じであることも分かる .

以上では平面パラメータと運動パラメータを既知としたが , 次にそれらを未知として 3 次元復元を行った . ただし , 絶対的な位置やスケールが不定であるから , 6 節のように第 1 カメラを基準として  $\|t\| = 1$  と正規化した . 図 5 は図 4(b) と同様にして 3 次元復元した格子とその真の位置を表示したものである . 平面パラメータの推定に誤差があるので , 復元位置は真の位置とはややずれている .

表 2 は再投影誤差と 3 次元位置の誤差を示したものである . 3 次元復元誤差は  $\|t\| = 1$  となるようにスケールを変換している . 平面が既知の場合と比較すると , 未知の射影変換を再投影誤差が最小になるように推定しているために再投影誤差が減少する . 統計学によれば ,

射影変換の自由度が 8, 余次元が 2 であることから最尤推定を行った場合に  $Ne^2/\sigma^2$  は自由度  $2N-8$  の  $\chi^2$  分布し, 期待値が  $2N-8$  である. ゆえに再投影誤差  $e$  はほぼ  $\sqrt{2(1-4/N)}\sigma$  である. 表 2 の値もそれに近い. また第 1 近似と厳密な計算では値は非常に近い.

もちろん再投影誤差が減少したからといって 3 次元復元精度が向上するわけではない. 射影変換を推定したため, その推定誤差の分だけ 3 次元復元誤差が増加していることが表 2 から分かる. なお, 平面やカメラ配置が未知でもシーンが一般的な形状なら 2 画像の対応点のみから 3 次元形状が計算できるが, 平面シーンに対しては解が定まらない<sup>2),5),6),8)</sup>. したがって平面性を考慮しない復元結果は得られない.

## 8. まとめ

本論文では 2 画像の対応点から, その点がある平面上に載っているという知識を用いてその 3 次元位置を計算する最適な計算法を示した<sup>\*1</sup>. これは平面性を利用しない一般の場合の金谷<sup>12)</sup> の最適な三角測量の平面の場合へ拡張である. これを平面やカメラ配置が既知の場合とそれらが未知の場合とに分けて示したが, 我々の前者の方法は後者を自動的に包括している. すなわち, 平面やカメラ配置 (射影変換) が既知の場合に最適な 3 次元計算を反復によって計算し, 射影変換が未知の場合ははその反復過程でその推定を反復的に更新すればよい. これによって射影変換も厳密に最適化できる.

これは平面性を仮定しない場合に基礎行列が既知の三角測量<sup>12)</sup> の反復において, 基礎行列を反復的に更新することによって基礎行列も厳密に最適化できるという金谷<sup>10)</sup> の方法に対応している. それに対して, 基礎行列が既知の場合の Hartley ら<sup>3)</sup> の 6 次方程式を解く三角測量も, 射影変換が既知の場合の Chum ら<sup>1)</sup> の 8 次 6 次方程式を解く平面三角測量も, それらからは基礎行列や射影変換の最適解は得られない.

このように, 本論文の方法論は射影変換の厳密な最適解を与えるが, シミュレーションにより, Sampson 誤差最小化の解との差が非常に小さいことが示された. このことから逆に, 前報<sup>18)</sup> で示した多拘束 FNS 法が実質的に最適であることも実証された.

謝辞: 本研究の一部は文部科学省科学研究費基盤研究 (C 21500172) の助成によった.

## 参考文献

- 1) O. Chum, T. Pajdla, P. Sturm, The geometric error for homographies, *Comput. Vis. Im. Understand.*, **97**-1 (2002-1), 86-102.
- 2) R. Hartley and A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cam-

- bridge University Press, Cambridge, U.K., 2000.
- 3) R. I. Hartley and P. Sturm, Triangulation, *Comput. Vision Image Understand.*, **68**-2 (1997-11), 146-157.
- 4) J. C. Hay, Optical motions and space perception—An extension of Gibson's analysis, *Psych. Rev.*, **73**-6 (1966-11), 550-565.
- 5) 金谷健一, 「画像理解—3次元認識の数理—」, 森北出版, 1990.
- 6) K. Kanatani, *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.
- 7) 金谷健一, 幾何学的補正問題の最適計算と精度の理論限界, 情報処理学会論文誌, **37**-3 (1996-3), 363-370.
- 8) K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice* Elsevier, Amsterdam, the Netherlands, 1996; reprinted, Dover, York, NY, U.S.A., 2005.
- 9) 金谷健一, 「形状CADと図形の数学」, 共立出版, 1998.
- 10) 金谷健一, 菅谷保之, 高ノイズレベルにおける基礎行列の最尤推定, 情報処理学会研究報告, 2007-CVIM-160-9 (2007-9), 49-56.
- 11) 金谷健一, 菅谷保之, 幾何学的当てはめの厳密な最尤推定の統一的計算法, 情報処理学会論文誌: CVIM, **2**-1 (2009-3), 53-62.
- 12) 金谷健一, 菅谷保之, 新妻弘崇, 2 画像からの三角測量: Hartley-Sturm vs. 最適補正, 情報処理学会研究報告 2008-CVIM-162-54 (2008-3), 335-342.
- 13) 金澤 靖, 金谷健一, ステレオによる平面の直接的な再構成, 情報処理学会研究報告 94-CV-89-4 (1994-5), 25-32.
- 14) 金澤靖, 太田直哉, 金谷健一, 射影変換行列の最適計算によるモザイク生成, 情報処理学会研究報告 99-CVIM-116-2 (1999-5), 9-16.
- 15) 川島徹, 金澤靖, 金谷健一, ステレオによる 3 次元復元の信頼性評価, 情報処理学会研究報告, 94-CV-90-5 (1994-9), 33-40.
- 16) H. C. Longuet-Higgins, The reconstruction of a planar surface from two perspective projections, *Proc. Royal Soc. Lond.*, **B-227**-1249 (1986-5), 399-410.
- 17) 中川裕介, 金谷健一, 菅谷保之, 高ノイズレベルにおける最尤楕円当てはめ, 情報処理学会研究報告 2008-CVIM-162-10 (2008-3), 53-60.
- 18) 新妻 弘崇, 金谷 健一, 最適な射影変換の新しい計算アルゴリズム, 情報処理学会研究報告 2009-CVIM-169-37 (2009-11), 1-8.
- 19) 新妻 弘崇, ブラサンナ・ランガラヤン, 金谷 健一, 反復を要しない射影変換の高精度解法情報処理学会研究報告 2009-CVIM-170-57 (2010-1) 1-8.
- 20) 清水慶行, 太田直哉, 金谷健一, 信頼性評価を備えた最適な射影変換の計算プログラム, 情報処理学会研究報告 98-CVIM-111-5 (1998-5), 33-40.
- 21) R. Y. Tsai and T. S. Huang, Estimation of three-dimensional motion parameters of a rigid planar patch, *IEEE Trans. Acoustics Speech Signal Process.*, **29**-6 (1981-12), 1147-1152.
- 22) R. Y. Tsai and T. S. Huang, Estimation of three-dimensional motion parameters of a rigid planar patch III: Finite point correspondence and the three-view problem, *IEEE Trans. Acoustics Speech Signal Process.*, **32**-2 (1984-4), 213-220.
- 23) R. Y. Tsai, T. S. Huang and W.-L. Zhu, Estimation of three-dimensional motion

\*1 プログラムを Web 上に公開している. <http://www.suri.cs.okayama-u.ac.jp/program.html>

parameters of a rigid planar patch II: Singular value decomposition, *IEEE Trans. Acoustics Speech Signal Process.*, **30**-4 (1982-8), 525-544.

## 付 録

式 (8) を最小にする  $\bar{p}$  を求める代わりに  $\bar{p} = p - \Delta p$  と書き、補正量  $\Delta p$  を推定してもよい。このとき、式 (7) は  $(\xi^{(k)}(p - \Delta p), h) = 0$ ,  $k = 1, 2, 3$  となり、式 (8) は  $E = \|\Delta p\|^2$  と書ける。 $\xi^{(k)} = \xi^{(k)}(p)$  とおき、テイラー展開  $\xi^{(k)}(p - \Delta p) = \xi^{(k)} - T^{(k)}\Delta p + \dots$  を代入し、第 1 近似として補正項  $\Delta p$  の 2 次の項を無視すると次式を得る。

$$(T^{(k)}\Delta p, h) = (\xi^{(k)}, h) \quad (32)$$

そして、ラグランジュ乗数  $\lambda^{(k)}$  を導入して

$$\frac{1}{2}\|\Delta p\|^2 - \sum_{k=1}^3 \lambda^{(k)}(T^{(k)}\Delta p, h) = \frac{1}{2}(\Delta p, \Delta p) - \sum_{k=1}^3 \lambda^{(k)}(\Delta p, T^{(k)\top} h) \quad (33)$$

とおき、 $\Delta p$  で微分して 0 とおくと次式が得られる。

$$\Delta p = \sum_{k=1}^3 \lambda^{(k)} T^{(k)\top} h \quad (34)$$

ゆえに  $E = \|\Delta p\|^2$  は次のようになる。

$$E = \left( \sum_{k=1}^3 \lambda^{(k)} T^{(k)\top} h, \sum_{l=1}^3 \lambda^{(l)} T^{(l)\top} h \right) = \sum_{k,l=1}^3 V^{(kl)} \lambda^{(k)} \lambda^{(l)} \quad (35)$$

ただし、式 (14) の  $V_0^{(kl)}[\xi]$  の定義を用い、 $V^{(kl)} = (h, V_0^{(kl)}[\xi]h)$  と置いた。一方、式 (34) を式 (32) に代入すると次式が得られる。

$$\sum_{l=1}^3 (h, V_0^{(kl)}[\xi]h) \lambda^{(l)} = (\xi^{(k)}, h) \quad (36)$$

これは  $\lambda^{(l)}$  に関する連立 1 次方程式であるが、誤差がないとき係数行列のランクが 2 となる。そこでこれを式 (15) のランク 2 の一般逆行列  $W$  を用いて解くと、次のようになる。

$$\lambda^{(k)} = \sum_{l=1}^3 W^{(kl)}(\xi^{(l)}, h) \quad (37)$$

これを式 (35) に代入すると次のようになる。

$$E = \sum_{k,l=1}^3 V^{(kl)} \sum_{m=1}^3 W^{(km)}(\xi^{(m)}, h) \sum_{n=1}^3 W^{(ln)}(\xi^{(n)}, h) = \sum_{k,l=1}^3 W^{(kl)}(\xi^{(k)}, h)(\xi^{(l)}, h) \quad (38)$$

ただし、一般逆行列に関する関係  $WVW = W(W)_2^-W = W$  を用いた。式 (34), (37) から真値  $\bar{p}$  が式 (16) で  $\xi^{(l)*}$  を  $\xi^{(l)}$  とした式で推定される。

しかし、これは第 1 近似である。そこで真値を  $\bar{p} = \hat{p} - \Delta \hat{p}$  とおき、高次の補正量  $\Delta \hat{p}$  を推定する。これを代入すると、式 (7) は  $(\xi^{(k)}(\hat{p} - \Delta \hat{p}), h) = 0$ ,  $k = 1, 2, 3$  となり、式 (8) は  $E = \|\bar{p} + \Delta \hat{p}\|^2$  と書ける。ただし、 $\bar{p} = p - \hat{p}$  と置いた。 $\xi^{(k)}(\hat{p} - \Delta \hat{p})$  をテイラー展開して  $\Delta \hat{p}$  の 2 次の項を無視すると、次のようになる。

$$(\hat{T}^{(k)}\Delta \hat{p}, h) = (\hat{\xi}^{(k)}, h) \quad (39)$$

ただし、 $\hat{\xi}^{(k)} = \xi^{(k)}(\hat{p})$  であり、 $\hat{T}^{(k)}$  は行列  $T^{(k)}$  に  $p = \hat{p}$  を代入したものである。ラグランジュ乗数  $\lambda$  を導入して、

$$\frac{1}{2}\|\bar{p} + \Delta \hat{p}\|^2 - \sum_{k=1}^3 \lambda^{(k)}(\hat{T}^{(k)}\Delta \hat{p}, h) = \frac{1}{2}(\bar{p} + \Delta \hat{p}, \bar{p} + \Delta \hat{p}) - \sum_{k=1}^3 \lambda^{(k)}(\Delta \hat{p}, \hat{T}^{(k)\top} h) \quad (40)$$

を  $\Delta \hat{p}$  で微分して 0 とおくと次式が得られる。

$$\Delta \hat{p} = \sum_{k=1}^3 \lambda^{(k)} \hat{T}^{(k)\top} h - \bar{p} \quad (41)$$

これを  $E = \|\bar{p} + \Delta \hat{p}\|^2$  に代入すると次のようになる。

$$E = \left( \sum_{k=1}^3 \lambda^{(k)} \hat{T}^{(k)\top} h, \sum_{l=1}^3 \lambda^{(l)} \hat{T}^{(l)\top} h \right) = \sum_{k,l=1}^3 \hat{V}^{(kl)} \lambda^{(k)} \lambda^{(l)} \quad (42)$$

ただし、 $\hat{V}_0^{(kl)}[\xi] = \hat{T}^{(k)}\hat{T}^{(l)\top}$ ,  $\hat{V}^{(kl)} = (h, \hat{V}_0^{(kl)}[\xi]h)$  とに置いた。一方、式 (41) を式 (39) に代入して、書き直すと

$$\sum_{l=1}^3 \hat{V}^{(kl)} \lambda^{(l)} = (\hat{\xi}^{(k)*}, h) \quad (43)$$

となる。ただし  $\hat{\xi}^{(k)*} = \hat{\xi}^{(k)} + \hat{T}^{(k)}\bar{p}$  と置いた。式 (43) から  $\lambda^{(k)}$  が次のように定まる。

$$\lambda^{(k)} = \sum_{l=1}^3 \hat{W}^{(kl)}(\hat{\xi}^{(l)*}, h) \quad (44)$$

ただし、 $\hat{W}^{(kl)}$  は  $\hat{V}^{(kl)}$  を  $(kl)$  要素とする行列  $\hat{V}$  のランク 2 の一般逆行列  $\hat{W} = (\hat{V})_2^-$  の  $(kl)$  要素である。式 (44) を式 (42) を代入すると、再投影誤差  $E$  が次のように書ける。

$$E = \sum_{k,l=1}^3 \hat{V}^{(kl)} \sum_{m=1}^3 \hat{W}^{(km)}(\hat{\xi}^{(m)*}, h) \sum_{n=1}^3 \hat{W}^{(ln)}(\hat{\xi}^{(n)*}, h) = \sum_{k,l=1}^3 \hat{W}^{(kl)}(\hat{\xi}^{(k)*}, h)(\hat{\xi}^{(l)*}, h) \quad (45)$$

ただし、一般逆行列に関する関係  $\hat{W}\hat{V}\hat{W} = \hat{W}(\hat{W})_2^- \hat{W} = \hat{W}$  を用いた。式 (41), (42) から真値  $\bar{p}$  は式 (16) で推定される。その結果を改めて  $\hat{p}$  とおき、さらに高次の補正量を推定し、これを収束するまで反復する。最終的には  $\Delta \hat{p}$  が 0 になる。