効率的探索によるランク拘束した基礎行列の高精度計算

菅谷 保之 * **金谷 健一** †

* 豊橋技術科学大学情報工学系 † 岡山大学大学院自然科学研究科

2 画像の対応点データから基礎行列をランク 2 という拘束のもとに最尤推定 (ML) によって計算する新しい方法を提案する．これは基礎行列の最適な特異値分解 (SVD) を直接にレーベンバーグ・マーカート (LM) 法で探索するものであり，3 次元座標やカメラ行列を未知変数に含める必要がない．シミュレーションにより解の精度を理論限界（KCR 下界）と比較し，ランクを考慮しない最尤推定解の最適補正よりもさらに精度限界に近づき，かつ実行時間も一般に減少することを示す．

High Accuracy Computation of Rank-constrained Fundamental Matrix by Efficient Search

Yasuyuki Sugaya* and **Kenichi Kanatani**†

*Department of Information and Computer Sciences,
Toyohashi University of Technology, Toyohashi, Aichi 441-8580 Japan
†Department of Computer Science, Okayama University, Okayama 700-8530 Japan

A new method is presented for computing the fundamental matrix from point correspondences over two images by maximum likelihood (ML) subject to the constraint that it has rank 2: an optimal singular value decomposition (SVD) of the fundamental matrix is directly searched for by the Levenberg-Marquard (LM) method. There is no need to include 3-D coordinates or camera matrices as unknowns. The accuracy of the solution is compared with the theoretical bound (KCL lower bound) by simulation, demonstrating that the proposed method is generally superior to optimal rank correction of unconstrained ML, yet the computation time is generally shorter.

1. まえがき

画像間の特徴点の対応から基礎行列を計算することはカメラ校正，密な対応探索，3 次元形状復元，新しい視点からの画像生成など多くの処理の出発点である [7]．前報 [18] では，誤差のあるデータから基礎行列を精度よく計算するための従来の方法および新しい方法をまとめ，その精度と計算効率を比較した．

基礎行列は 2 画像間の対応点が「エピ極線方程式」を満たすことから計算されるが，ランク 2 という性質がある [7]．このランク拘束を考慮しなくても，対応点データが正しければ計算される基礎行列は自動的にランク 2 になる．しかし，誤差があれば必ずしもランク 2 とは限らない．前報 [18] ではランク拘束を考慮せずに基礎行列を計算し，これを統計的に最適にランク補正する方法を用いた．これは精度の理論限界（「KCR 下界」[13]）に近い精度を持つ最適解となっている．

これに対して，対応点データからランク 2 という条件のもとで基礎行列を計算するいろいろな試みがある [1, 4, 16, 19]．本論文では，従来法よりも効率的な方法を提案し，精度を KCR 下界と比較する．これは基礎行列の最適な特異値分解 (SVD) を直接にレーベンバーグ・マーカート (LM) 法で探索するものであり，3 次元座標やカメラ行列を未知変数に含める必要がない．そして，シミュレーションにより，一般に前報 [18] に示した最適補正法よりもさらに高い精度が得られ，かつ実行時間も一般に減少することを示す．

2. 基礎行列の最適計算

2.1 エピ極線方程式

同一シーンを異なる位置から撮影した 2 画像において，第 1 画像の点 (x, y) と第 2 画像の点 (x', y') がシーンの同一点であれば，次の**エピ極線方程式**が成

*441-8580 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1–1
sugaya@iim.ics.tut.ac.jp
†700-8530 岡山市津島中 3–1–1, (086)251-8173
kanatani@suri.it.okayama-u.ac.jp

り立つ [7].

$$(\begin{pmatrix} x \\ y \\ f_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ f_0 \end{pmatrix}) = 0 \tag{1}$$

以下，ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内積を $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ と書く．行列 $\boldsymbol{F} = (F_{ij})$ は**基礎行列**と呼ばれ，2 台のカメラの相対的位置とそれらの内部パラメータのみによって定まる（シーンにはよらない）ランク 2 の行列である．式 (1) 中の f_0 は任意の定数である[1].

新しいベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}$ を

$$\boldsymbol{u} = (F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{21}, F_{22}, F_{23}, F_{31}, F_{32}, F_{33})^\top \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\xi} = (xx', xy', xf_0, yx', yy', yf_0, f_0x', f_0y', f_0^2)^\top \tag{3}$$

と置けば，式 (1) は次のように書ける．

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}) = 0 \tag{4}$$

明らかに $\boldsymbol{u}$ の大きさは不定であり，以後 $\|\boldsymbol{u}\| = 1$ と正規化する．

誤差のある対応点が N 組得られたとき，それらを式 (3) によって 9 次元ベクトルに変換したものを $\{\boldsymbol{\xi}_\alpha\}$ とする．基礎行列の計算は $\{\boldsymbol{\xi}_\alpha\}$ から式 (4) を満たす 9 次元ベクトル $\boldsymbol{u}$ を推定する問題である．

2.2 解の共分散行列

各データベクトル $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ を $\boldsymbol{\xi}_\alpha = \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha + \Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha$ と書き，$\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha$ は誤差のない値，$\Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha$ は誤差項とする．この $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ の共分散行列を次のように定義する．

$$V[\boldsymbol{\xi}_\alpha] = E[\Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top] \tag{5}$$

$E[\cdot]$ は誤差の分布に関する期待値を表す．各対応点の各座標に期待値 0, 標準偏差 σ の誤差が独立に加わっているとき，式 (3), (5) から共分散行列 $V[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ は $O(\sigma)^4$ を除いて $V[\boldsymbol{\xi}_\alpha] = \sigma^2 V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ と書ける．ただし，

$$V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha] = \begin{pmatrix}
\bar{x}_\alpha^2 + \bar{x}_\alpha'^2 & \bar{x}_\alpha'\bar{y}_\alpha' & f_0\bar{x}_\alpha' & \bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha & 0 & 0 & f_0\bar{x}_\alpha & 0 & 0 \\
\bar{x}_\alpha'\bar{y}_\alpha' & \bar{x}_\alpha^2 + \bar{y}_\alpha'^2 & f_0\bar{y}_\alpha' & 0 & \bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha & 0 & 0 & f_0\bar{x}_\alpha & 0 \\
f_0\bar{x}_\alpha' & f_0\bar{y}_\alpha' & f_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha & 0 & 0 & \bar{y}_\alpha^2 + \bar{x}_\alpha'^2 & \bar{x}_\alpha'\bar{y}_\alpha' & f_0\bar{x}_\alpha' & f_0\bar{y}_\alpha & 0 & 0 \\
0 & \bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha & 0 & \bar{x}_\alpha'\bar{y}_\alpha' & \bar{y}_\alpha^2 + \bar{y}_\alpha'^2 & f_0\bar{y}_\alpha' & 0 & f_0\bar{y}_\alpha & 0 \\
0 & 0 & 0 & f_0\bar{x}_\alpha' & f_0\bar{y}_\alpha' & f_0^2 & 0 & 0 & 0 \\
f_0\bar{x}_\alpha & 0 & 0 & f_0\bar{y}_\alpha & 0 & 0 & f_0^2 & 0 & 0 \\
0 & f_0\bar{x}_\alpha & 0 & 0 & f_0\bar{y}_\alpha & 0 & 0 & f_0^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \tag{6}$$

と置き，**正規化共分散行列**と呼ぶ．上式中の $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$, $(\bar{x}_\alpha', \bar{y}_\alpha')$ はデータ点 (x_α, y_α), (x_α', y_α') の真の位置であり，最適化の計算においては (x_α, y_α), (x_α', y_α') に置き換えて計算する[2].

誤差のあるデータから計算したランク 2 の推定量 $\hat{\boldsymbol{u}}$ の共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{u}}]$ を次のように定義する．

$$V[\hat{\boldsymbol{u}}] = E[(\boldsymbol{P}_{\mathcal{U}}\hat{\boldsymbol{u}})(\boldsymbol{P}_{\mathcal{U}}\hat{\boldsymbol{u}})^\top] \tag{7}$$

ここに $\boldsymbol{P}_{\mathcal{U}}$ は 9 次元パラメータ空間において $\|\boldsymbol{u}\| = 1$, $\det \boldsymbol{F} = 0$ の定める多様体 $\mathcal{U}$ への射影行列である．これは，$\boldsymbol{u}$ が単位ベクトルに正規化され，かつランク拘束を満たすので，解 $\hat{\boldsymbol{u}}$ を多様体 $\mathcal{U}$ の真値 $\boldsymbol{u}$ における接空間に射影して，その接空間上で誤差を評価するという意味である．

多様体 $\mathcal{U}$ は 9 次元空間 $\mathcal{R}^9$ の 8 次元単位球面 $\mathcal{S}^8$ に含まれるから，$\boldsymbol{u}$ は $\mathcal{U}$ の単位法線ベクトルでもある．一方，$\det \boldsymbol{F} = 0$ の表す超曲面の法線ベクトルは $\nabla_{\mathbf{u}} \det \boldsymbol{F}$ であり，これを単位ベクトルへ正規化すると，次のように書ける．

$$\boldsymbol{u}^\dagger \equiv N[\begin{pmatrix} u_5u_9 - u_8u_6 \\ u_6u_7 - u_9u_4 \\ u_4u_8 - u_7u_5 \\ u_8u_3 - u_2u_9 \\ u_9u_1 - u_3u_7 \\ u_7u_2 - u_1u_8 \\ u_2u_6 - u_5u_3 \\ u_3u_4 - u_6u_1 \\ u_1u_5 - u_4u_2 \end{pmatrix}] \tag{8}$$

ただし，$N[\cdot]$ は単位ベクトルへの正規化作用素である．その中身は $\boldsymbol{u}$ の表す基礎行列 $\boldsymbol{F}$ の余因子行列 $\boldsymbol{F}^\dagger$ の転置 $\boldsymbol{F}^{\dagger\top}$ の 9 次元ベクトル表現（式 (2)）になっている．したがって，拘束 $\det \boldsymbol{F} = 0$ は次のよ

[1]数値計算の安定性のためのスケールの調節である [6]．本論文の実験では $f_0 = 600$ とした．

[2]そうしても後のシミュレーション実験結果が左右されないことが確認される．

うにも書ける．

$$(\boldsymbol{u}^\dagger, \boldsymbol{u}) = 0 \tag{9}$$

以上より，$\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}^\dagger\}$ が拘束多様体 $\mathcal{U}$ に直交する正規直交系となっている．ゆえに式 (7) 中の射影行列 $\boldsymbol{P}_\mathcal{U}$ は次のように書ける（$\boldsymbol{I}$ は単位行列）．

$$\boldsymbol{P}_\mathcal{U} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\top - \boldsymbol{u}^\dagger\boldsymbol{u}^{\dagger\top} \tag{10}$$

2.3 KCR 下界

誤差 $\Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha$ の分布を期待値 $\boldsymbol{0}$，共分散行列 $\sigma^2 V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ の独立な正規分布とみなせば，$\hat{\boldsymbol{u}}$ の任意の不偏推定量に対して次の不等式が成り立つ [9, 11, 13]．

$$V[\hat{\boldsymbol{u}}] \succ \sigma^2 \Big(\sum_{\alpha=1}^N \frac{(\boldsymbol{P}_\mathcal{U}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)(\boldsymbol{P}_\mathcal{U}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)^\top}{(\boldsymbol{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u})} \Big)_8^- \tag{11}$$

ただし，$\succ$ は左辺から右辺を引いたものが半正値対称行列であることを意味し，$(\cdot)_r^-$ はランク r の一般逆行列[3]を表す．Chernov ら [2] は式 (11) の右辺を **KCR (Kanatani-Cramer-Rao) 下界** と呼んだ．そして，$\hat{\boldsymbol{u}}$ が不偏推定量でなくても，$\sigma \to 0$ で $\hat{\boldsymbol{u}} \to \boldsymbol{u}$ であれば $O(\sigma^4)$ を除いて式 (11) が成立することを示した．

2.4 基礎行列の最尤推定

誤差 $\Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha$ の分布を期待値 $\boldsymbol{0}$，共分散行列 $\sigma^2 V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ の独立な正規分布とみなすと，この問題の**最尤推定**は，拘束条件 $(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha) = 0$, $\alpha = 1, ..., N$ のもとで**マハラノビス距離**の二乗和

$$J = \sum_{\alpha=1}^N (\boldsymbol{\xi}_\alpha - \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]_2^- (\boldsymbol{\xi}_\alpha - \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)) \tag{12}$$

を最小にする $\boldsymbol{u}$, $\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha$ を計算することである[4]．ラグランジュ乗数を導入して拘束条件を除去すれば，式 (12) は次式となる [11, 13]．

$$J = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)^2}{(\boldsymbol{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u})} \tag{13}$$

最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{u}}$ はこれを条件 $\|\boldsymbol{u}\| = 1$, $(\boldsymbol{u}^\dagger, \boldsymbol{u}) = 0$ のもとで最小にするものである．その共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{u}}]$ は KCR の下界（式 (11) の右辺）に $O(\sigma^4)$ を除いて一致する [11, 13]．

[3]スペクトル分解して大きい r 個の固有値を逆数に置き換え，残りの固有値を 0 に置き換えた行列．

[4]9 次元空間 $\mathcal{R}^9$ の N 点 $\{\boldsymbol{\xi}_\alpha\}$ に式 (4) の超平面を各点の共分散行列 $V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ に反比例する重み付き距離の二乗和が最小になるように当てはめる問題と解釈できる．

3. 最適補正による方法

前報 [18] に示したランクの最適補正をまとめる．

3.1 ランクの最適補正

式 (13) を最小にするランク拘束した解 $\hat{\boldsymbol{u}}$ を計算する最も簡明な方法は，まずランクを考慮せずに式 (13) の最小化し，その解 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ を $(\boldsymbol{u}^\dagger, \boldsymbol{u}) = 0$ となるように最適に補正する方法である．

統計的最適化理論 [9, 11] によれば，解 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ の信頼性を表す共分散行列 $V[\tilde{\boldsymbol{u}}]$（任意に定数倍してよい）が計算できるので，解 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ を変動の可能性が最も高い方向に $(\boldsymbol{u}^\dagger, \boldsymbol{u}) = 0$ となるように移動する．これにより解 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ は式 (13) の J の増加量が最も少なくなる方向に移動し，得られる解 $\hat{\boldsymbol{u}}$ は高次の誤差項を除いて，式 (13) を条件 $(\boldsymbol{u}^\dagger, \boldsymbol{u}) = 0$ のもとで最小化した解と一致する [10, 11]．具体的には次の手順となる．

1. 次の 9×9 行列 $\tilde{\boldsymbol{M}}$ を計算する．

$$\tilde{\boldsymbol{M}} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\boldsymbol{\xi}_\alpha\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top}{(\tilde{\boldsymbol{u}}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\tilde{\boldsymbol{u}})} \tag{14}$$

2. 正規化共分散行列 $V_0[\tilde{\boldsymbol{u}}]$ を次のように計算する．

$$V_0[\tilde{\boldsymbol{u}}] = \tilde{\boldsymbol{M}}_8^- \tag{15}$$

3. 解 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ を次のように更新する[5]．

$$\tilde{\boldsymbol{u}} \leftarrow N[\tilde{\boldsymbol{u}} - \frac{1}{3}\frac{(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{u}}^\dagger)V_0[\tilde{\boldsymbol{u}}]\tilde{\boldsymbol{u}}^\dagger}{(\tilde{\boldsymbol{u}}^\dagger, V_0[\tilde{\boldsymbol{u}}]\tilde{\boldsymbol{u}}^\dagger)}] \tag{16}$$

4. $(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{u}}^\dagger) \approx 0$ なら $\tilde{\boldsymbol{u}}$ を返して終了する．そうでなければ正規化共分散行列 $V_0[\tilde{\boldsymbol{u}}]$ を次のように更新して，ステップ 3 に戻る．

$$\boldsymbol{P}_{\tilde{\mathbf{u}}} = \boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{u}}\tilde{\boldsymbol{u}}^\top, \quad V_0[\tilde{\boldsymbol{u}}] \leftarrow \boldsymbol{P}_{\tilde{\mathbf{u}}} V_0[\tilde{\boldsymbol{u}}] \boldsymbol{P}_{\tilde{\mathbf{u}}} \tag{17}$$

【説明】 解 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ は単位ベクトルであるから，9 次元空間 $\mathcal{R}^9$ の単位球面 $\mathcal{S}^8$ 上にある．式 (16) はその接空間上で J を最も増加させない方向に $(\tilde{\boldsymbol{u}}^\dagger, \tilde{\boldsymbol{u}}) = 0$ となるように進めるニュートン法の式である．しかし，解が $\mathcal{S}^8$ から高次の微小量だけずれるので，正規化作用素 $N[\cdot]$ によって $\mathcal{S}^8$ に引き戻す．そして，その点から再び同じ計算を行い，$(\tilde{\boldsymbol{u}}^\dagger, \tilde{\boldsymbol{u}}) = 0$ となるまで反復する．ただし，正規化共分散行列 $V_0[\tilde{\boldsymbol{u}}]$ は接空間上で定義されているので，$\tilde{\boldsymbol{u}}$ の位置が変わるとその接空間も変化する．これを式 (17) によって補正する．

□

[5]$\tilde{\boldsymbol{u}}^\dagger$ は式 (8) を $\tilde{\boldsymbol{u}}$ に関して計算したもの．

3.2 FNS 法

ランクを考慮せずに式 (13) を最小化する方法としては前報 [18] に述べた Chojnacki ら [3] の **FNS 法** (Fundamental Numerical Scheme)，Leedan ら [15] の **HEIV 法** (Heteroscedastic Errors-in-Variable)，菅谷ら [18] の**射影ガウス・ニュートン法**がある．また金谷 [8, 11, 12] の**くりこみ法**によってもほぼ同精度の解が得られる．

以下の実験では FNS 法を用いる．これは式 (13) の $\boldsymbol{u}$ に関する微分が次のように書けることを利用している [3].

$$\nabla_{\mathbf{u}} J = \boldsymbol{X}\boldsymbol{u} \tag{18}$$

ただし，行列 $\boldsymbol{X}$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{X} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\boldsymbol{\xi}_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha^\top}{(\boldsymbol{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u})} - \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)^2 V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]}{(\boldsymbol{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u})^2} \tag{19}$$

FNS 法の手順は次のようになる [18].

1. $\boldsymbol{u}$ の初期値を与える．
2. 式 (19) の行列 $\boldsymbol{X}$ を計算する．
3. 固有値問題
$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{u}' = \lambda \boldsymbol{u}' \tag{20}$$
の最小固有値[6] λ に対する単位固有ベクトル $\boldsymbol{u}'$ を計算する．
4. 符号を除いて $\boldsymbol{u}' \approx \boldsymbol{u}$ なら $\boldsymbol{u}'$ を返して終了する．そうでなければ $\boldsymbol{u} \leftarrow \boldsymbol{u}'$ としてステップ 2 に戻る．

そして，得られた解 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ に，前節に述べたランクの最適補正を施す.

3.3 最小二乗法

FNS 法に与える初期値は次の**最小二乗法**（**代数距離最小化法**）[18]）によって計算する．これは

$$J_0 = \sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)^2 = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{M}_0 \boldsymbol{u}) \tag{21}$$

を最小にするものである．ただし，行列 $\boldsymbol{M}_0$ を

$$\boldsymbol{M}_0 = \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{\xi}_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha^\top \tag{22}$$

と置いた．式 (21) は $\boldsymbol{u}$ の 2 次形式であるから，これを最小にする解は行列 $\boldsymbol{M}_0$ の最小固有値に対応する単位固有ベクトルである．最小二乗法の代わりに Taubin 法 [18] を用いるとより精度の高い解が得られるが，計算時間が余計にかかる．

[6] 本来は絶対値最小の固有値 [3]．しかし，Chojnacki ら [5] は後に最小固有値を選ぶほうが収束性に優れることを指摘した．これは菅谷ら [18] の実験でも確認された．

4. 直接的な探索法

未知数 $\boldsymbol{u}$ がランク拘束を満たすという条件のもとで式 (13) を最小化する新しい探索法を提案する．

4.1 バンドル調整とエピ極線方程式

基礎行列 $\boldsymbol{F}$ には 9 個の要素があるが，正規化[7] $\|\boldsymbol{F}\| = 1$ とランク拘束 $\det \boldsymbol{F} = 0$ のために 7 自由度しかない．そこで $\boldsymbol{F}$ が常に $\|\boldsymbol{F}\| = 1$, $\det \boldsymbol{F} = 0$ を満たすように 7 個のパラメータで表し，その 7 パラメータ空間で式 (13) の J の最小値を探索するのは自然な考え方である．

このような 7 パラメータ表現はいろいろ考えられる．代表的のはエピ極点を介したパラメータ化である [16, 19]．しかし，式が非常に複雑になり，各々の未知数の幾何学的な意味が明らかでない．それに対して Bartoli ら [1] は基礎行列の特異値分解をパラメータとする方法を提案している．これにより，表現が簡潔になるとともに，各々のパラメータの幾何学的な意味が明らかになり，最適化の手順の記述が簡明になる．

しかし，Bartoli ら [1] は基礎行列に加えて，各特徴点の 3 次元位置，2 台のカメラの内部パラメータ，およびその配置まで未知数として，“仮の 3 次元復元” を行い，その投影像とデータとの二乗距離の和（**再投影誤差**）を最小にする 3 次元位置とカメラ配置を探索している．このような操作は**バンドル調整**と呼ばれる．

この方法の問題は，仮の 3 次元復元が不定で，同じ位置に投影される特徴点の 3 次元位置とカメラ配置が無数に存在することである．Bartoli ら [1] はそのある一つ（第 1 カメラが標準形であるもの）を用いている．

しかし，対応点 $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$, $\{(x'_\alpha, y'_\alpha)\}$ が，“ある” 特徴点の 3 次元位置と 2 台のカメラの内部パラメータとその配置が存在して,「その 3 次元復元による投影像になっている」という必要十分条件が式 (1) のエピ極線方程式であり，式 (12) が再投影誤差そのものである．したがって，仮の 3 次元復元による再投影誤差を最小化するバンドル調整は，エピ極線方程式

[7] 行列ノルムを $\|\boldsymbol{F}\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} F_{ij}^2}$ と定義する．これは式 (2) のように変換したベクトル $\boldsymbol{u}$ のノルム $\|\boldsymbol{u}\|$ と同じ値である．

$(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha) = 0$ のもとで式 (12) を最小化すること，すなわち式 (13) の最小化と等価である．ゆえに（無数に存在する）仮の 3 次元復元を考える必要はない．

そこで Bartoli ら [1] の特異値分解によるパラメータ化を用いて式 (13) を直接に LM（レーベンバーグ・マーカート）法によって最小化する．

4.2 特異値分解によるリー代数の方法

基礎行列 $\boldsymbol{F}$ はランク 2 であるから，次のように特異値分解される．

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{U}\mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, 0)\boldsymbol{V}^\top \tag{23}$$

ここに $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ は直交行列であり，σ_1, σ_2 は特異値である[8]．正規化条件 $\|\boldsymbol{F}\| = 1$ は $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 1$ と同値である．そこで次のようにパラメータ化する[9]．

$$\sigma_1 = \cos\theta, \qquad \sigma_2 = \sin\theta \tag{24}$$

直交行列 $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ はそれぞれ回転の 3 自由度を持つので，θ と合わせた 7 自由度がパラメータとなる．

しかし，$\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ の回転の自由度を直接に（例えばオイラー角や各座標軸周りの回転角で）パラメータ化すると非常に複雑になる．これを簡潔に処理する方法は，$\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ の "変化量" をそれぞれ 3 パラメータ ($\boldsymbol{U}$ について ω_1, ω_2, ω_3, $\boldsymbol{V}$ について ω_1', ω_2', ω_3') で表すことである．これは**リー代数の方法**とも呼ばれ，応用が広い [1, 17]．

式 (13) の ω_1，ω_2，ω_3 に関する微分 $\nabla_\omega J = \Big(\partial J/\partial\omega_1\ \partial J/\partial\omega_2\ \partial J/\partial\omega_3\Big)^\top$，および ω_1', ω_2', ω_3' に関する微分 $\nabla_{\omega'} J = \Big(\partial J/\partial\omega_1'\ \partial J/\partial\omega_2'\ \partial J/\partial\omega_3'\Big)^\top$ はそれぞれ次のようになる (途中計算省略)．

$$\nabla_\omega J = \boldsymbol{F}_U^\top \boldsymbol{X}\boldsymbol{u}, \qquad \nabla_{\omega'} J = \boldsymbol{F}_V^\top \boldsymbol{X}\boldsymbol{u} \tag{25}$$

ただし，$\boldsymbol{X}$ は式 (19) で定義される行列であり，$\boldsymbol{F}_U$, $\boldsymbol{F}_V$ は次のように定義する．

$$\boldsymbol{F}_U = \begin{pmatrix} 0 & F_{31} & -F_{21} \\ 0 & F_{32} & -F_{22} \\ 0 & F_{33} & -F_{23} \\ -F_{31} & 0 & F_{11} \\ -F_{32} & 0 & F_{12} \\ -F_{33} & 0 & F_{13} \\ F_{21} & -F_{11} & 0 \\ F_{22} & -F_{12} & 0 \\ F_{23} & -F_{13} & 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

$$\boldsymbol{F}_V = \begin{pmatrix} 0 & F_{13} & -F_{12} \\ -F_{13} & 0 & F_{11} \\ F_{12} & -F_{11} & 0 \\ 0 & F_{23} & -F_{22} \\ -F_{23} & 0 & F_{21} \\ F_{22} & -F_{21} & 0 \\ 0 & F_{33} & -F_{32} \\ -F_{33} & 0 & F_{31} \\ F_{32} & -F_{31} & 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

式 (13) の θ に関する微分は次のようになる．

$$\frac{\partial J}{\partial\theta} = (\boldsymbol{u}_\theta, \boldsymbol{X}\boldsymbol{u}) \tag{28}$$

ただし，ベクトル $\boldsymbol{u}_\theta$ を次のように定義した．

$$\boldsymbol{u}_\theta = \begin{pmatrix} \sigma_1 u_{12}v_{12} - \sigma_2 u_{11}v_{11} \\ \sigma_1 u_{12}v_{22} - \sigma_2 u_{11}v_{21} \\ \sigma_1 u_{12}v_{32} - \sigma_2 u_{11}v_{31} \\ \sigma_1 u_{22}v_{12} - \sigma_2 u_{21}v_{11} \\ \sigma_1 u_{22}v_{22} - \sigma_2 u_{21}v_{21} \\ \sigma_1 u_{22}v_{32} - \sigma_2 u_{21}v_{31} \\ \sigma_1 u_{32}v_{12} - \sigma_2 u_{31}v_{11} \\ \sigma_1 u_{32}v_{22} - \sigma_2 u_{31}v_{21} \\ \sigma_1 u_{32}v_{32} - \sigma_2 u_{31}v_{31} \end{pmatrix} \tag{29}$$

同様にして 2 階微分を計算し，ガウス・ニュートン近似[10]を行なうと次のようになる (途中計算省略)．

$$\nabla_\omega^2 J = \boldsymbol{F}_U^\top \boldsymbol{X}\boldsymbol{F}_U, \qquad \nabla_{\omega'}^2 J = \boldsymbol{F}_V^\top \boldsymbol{X}\boldsymbol{F}_V \tag{30}$$

$$\nabla_{\omega\omega'} J = \boldsymbol{F}_U^\top \boldsymbol{X}\boldsymbol{F}_V, \qquad \frac{\partial J^2}{\partial\theta^2} = (\boldsymbol{u}_\theta, \boldsymbol{X}\boldsymbol{u}_\theta) \tag{31}$$

$$\frac{\partial\nabla_\omega J}{\partial\theta} = \boldsymbol{F}_U^\top \boldsymbol{X}\boldsymbol{u}_\theta, \qquad \frac{\partial\nabla_{\omega'} J}{\partial\theta} = \boldsymbol{F}_V^\top \boldsymbol{X}\boldsymbol{u}_\theta \tag{32}$$

4.3 計算手順

以上より，特異値分解に基いてリー代数の方法を用いる LM 法の手順は次のようになる．

1. $\det\boldsymbol{F} = 0$, $\|\boldsymbol{F}\| = 1$ となる初期値 $\boldsymbol{F}$ を与え，$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{U}\mathrm{diag}(\cos\theta, \sin\theta, 0)\boldsymbol{V}^\top$ と表す．
2. 式 (13) の J を計算し，$c = 0.0001$ と置く．
3. 式 (26), (27), (29) の $\boldsymbol{F}_U$, $\boldsymbol{F}_V$, $\boldsymbol{u}_\theta$ を計算する．
4. 式 (19) の行列 $\boldsymbol{X}$ を計算し，式 (25), (28) の 1 階微分，および式 (30), (31), (32) の 2 階微分を計算する．

[8] $\mathrm{diag}(\cdots)$ は $\cdots$ をこの順に対角要素とする対角行列．

[9] Bartoli ら [1] は比 $\gamma = \sigma_2/\sigma_1$ をパラメータにとっているが，ここでは対称性を考慮して角度 θ をパラメータとする．

[10] 微小量 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)$ を無視することに相当．

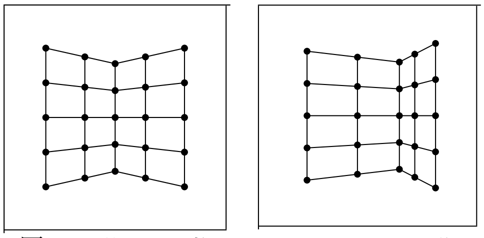

図 1: 2 枚の平面格子シミュレーション画像.

5. 次の行列 $\boldsymbol{H}$ を計算する.

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} \nabla^2_{\omega}J & \nabla_{\omega\omega'}J & \partial\nabla_{\omega}J/\partial\theta \\ (\nabla_{\omega\omega'}J)^\top & \nabla^2_{\omega'}J & \partial\nabla_{\omega'}J/\partial\theta \\ (\partial\nabla_{\omega}J/\partial\theta)^\top & (\partial\nabla_{\omega'}J/\partial\theta)^\top & \partial J^2/\partial\theta^2 \end{pmatrix} \tag{33}$$

6. 次の連立 1 次方程式を解いて $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}'$, $\Delta\theta$ を計算する.

$$(\boldsymbol{H}+cD[\boldsymbol{H}])\begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\omega}' \\ \Delta\theta \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \nabla_{\omega}J \\ \nabla_{\omega'}J \\ \partial J/\partial\theta \end{pmatrix} \tag{34}$$

ただし，$D[\cdot]$ は対角要素のみを取り出した対角行列を表す.

7. $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, θ を次のように更新する.

$$\boldsymbol{U}'=\mathcal{R}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{U},\quad \boldsymbol{V}'=\mathcal{R}(\boldsymbol{\omega}')\boldsymbol{V},\quad \theta'=\theta+\Delta\theta \tag{35}$$

ただし，$\mathcal{R}(\boldsymbol{\omega})$ は回転軸 $N[\boldsymbol{\omega}]$ の周りの右ねじ方向の回転角 $\|\boldsymbol{\omega}\|$ の回転である.

8. $\boldsymbol{F}$ を次のように更新する.

$$\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{U}'\mathrm{diag}(\cos\theta',\sin\theta',0)\boldsymbol{V}'^\top \tag{36}$$

9. $\boldsymbol{F}'$ に対する式 (13) の値を J' とする.
10. $J'<J$ または $J'\approx J$ でなければ $c\leftarrow 10c$ としてステップ 6 に戻る.
11. $\boldsymbol{F}'\approx\boldsymbol{F}$ なら $\boldsymbol{F}'$ を返して終了．そうでなければ $\boldsymbol{F}\leftarrow\boldsymbol{F}'$, $\boldsymbol{U}\leftarrow\boldsymbol{U}'$, $\boldsymbol{V}\leftarrow\boldsymbol{V}'$, $\theta\leftarrow\theta'$, $c\leftarrow c/10$ としてステップ 3 に戻る.

5. シミュレーション実験

5.1 設定

図 1 はシーン中で角度 60° をなす 2 枚の平面格子を異なる 2 方向から見た画像である．これは 600×600 画素を想定し，焦点距離は 1200 画素である．画像中の格子点を特徴点として，各点の x, y 座標に平均 0, 標準偏差 σ 画素の正規分布に従う乱数誤差を独立に加え，これから次の方法でランク拘束を満たす基礎行列を計算した.

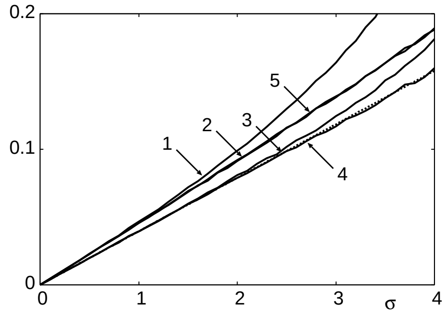

図 2: 図 1 に対する解の平方平均二乗誤差．横軸は加えた誤差の標準偏差 σ. 1) 最小二乗法の SVD 補正. 2) 最尤推定の SVD 補正. 3) 最適補正. 4) 提案法. 5) CFNS 法. 点線は KCR 下界.

1. 最小二乗法の SVD 補正
2. 最尤推定の SVD 補正
3. 最尤推定の最適補正
4. 提案法
5. CFNS 法

「SVD 補正」とは $\boldsymbol{F}$ の特異値分解の最小特異値を 0 に置き換えて $\det\boldsymbol{F}=0$ とするものである．ただし，記述の簡単のために,「ランク拘束を考慮しない最尤推定」を「最尤推定」と略記している．ここでは 3.2 節の FNS 法を用い，その初期値には 3.3 節の最小二乗法を用いた．最適補正は 3.1 節の手順でランク補正したものである．提案方法は最小二乗法の SVD 補正を初期値とした,

最後の CFNS 法は Chojnacki ら [4] が提案したものであり，式 (19) の行列 $\boldsymbol{X}$ をある形に変形して FNS 法と同じ反復を行うものである．Chojnacki ら [4] はこれによって $\det\boldsymbol{F}=0$ のもとで式 (13) を最小にする解が得られると述べている．ただし，最終的に厳密に $\det\boldsymbol{F}=0$ となっているとは限らないので，最後に SVD 補正を行うことを勧めている．比較のためにこの方法も試みた.

反復解法はいずれも $\boldsymbol{F}$ の更新量がノルムで測って 10^{-6} 以下を収束条件とした.

5.2 精度の比較

図 2 は σ を横軸にとり，各 σ に対して 10000 回の独立に試行し，式 (7) に対応する次の平方平均二乗誤差 D をプロットしたものである.

$$D=\sqrt{\frac{1}{10000}\sum_{a=1}^{10000}\|\boldsymbol{P}_{\mathcal{U}}\hat{\boldsymbol{u}}^{(a)}\|^2} \tag{37}$$

ただし $\hat{\boldsymbol{u}}^{(a)}$ は a 回目の試行の解 $\hat{\boldsymbol{F}}^{(a)}$ のベクトル表現であり，$\boldsymbol{P}_{\mathcal{U}}$ は式 (10) の射影行列である．点線は

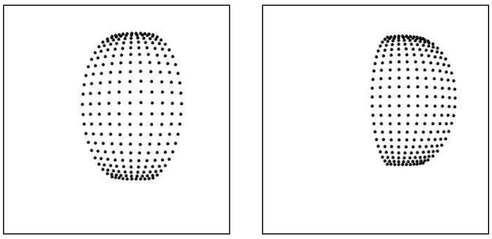

図 3: 2 枚の球面格子シミュレーション画像.

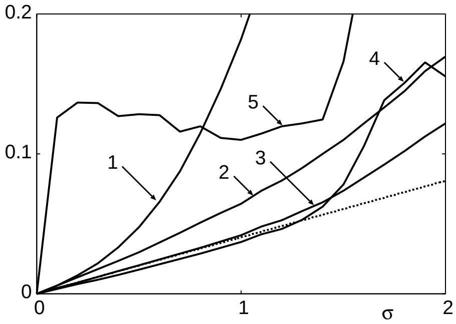

図 4: 図 3 に対する解の平方平均二乗誤差．横軸は加えた誤差の標準偏差 σ．1) 最小二乗法の SVD 補正．2) 最尤推定の SVD 補正．3) 最適補正．4) 提案法．5) CFNS 法．点線は KCR 下界.

式 (11) の KCR 下界から導かれる D の下界（式 (11) の右辺のトレース）である.

図 2 から分かるように，最小二乗法の SVD 補正は精度が低く，最尤推定の SVD 補正には及ばない．しかし，最尤推定の最適補正は KCR の下界に近い精度となる．それに対して，提案法は誤差が小さいときは最適補正とほぼ同等であるが，誤差が大きくなるにつれて最適補正よりも精度が向上し，KCR の下界に一致している.

一方，CFNS 法は誤差の全範囲に渡って最尤推定の SVD 補正程度の精度しかない．Chojnacki ら [4] は実験例を示して，CFNS 法が最適補正より優れている述べている．図 2 はこれに反する結果である．この理由は別報 [14] で詳しく考察することとし，本論文ではこれ以上触れない.

図 3 は球面上の格子パタンを 2 方向からみたシミュレーション画像である（サイズ 600×600，焦点距離 1200）．この場合の図 2 に対応する結果が図 4 である．この例では CFNS 法の精度が極めて悪い.

提案方法は誤差がそれほど大きくないときは最尤推定の最適補正よりもやや精度が上回るが，ある誤差以上では精度が悪化している．これは探索が局所解に収束しやすくなるためと思われる.

一方，ランク拘束を考慮しない最尤推定は誤差が大きくなっても安定に収束するので（これは前報 [18] の実験でも確認されている），その最適補正もまた安定した精度を示している．一般に，ランク拘束を課してパラメータ空間の次元を下げると関数形が複雑になり，局所解が多く現れる [16].

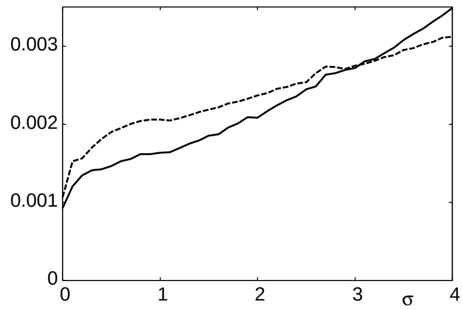

図 5: 誤差に対する実行時間（初期値の計算を含む）．破線は最適補正，実線は提案法.

5.3 実行時間の比較

図 5 に最適補正（破線）と提案法（実線）の実行時間（初期値の計算を含む）を示す．これは各 σ に対する 10000 回の試行の平均値である．CPU には Core2Duo E6700 2.66GHz，主メモリ 4GB，OS には Linux を用いた．これから，誤差がそれほど大きくなければ提案法のほうが最適補正よりも効率的であることがわかる．しかし，誤差が大きくなるとこれが逆転している.

これは次のように説明される．最適補正ではまずランク拘束を考慮しない最尤推定を計算する．その反復の各ステップで 9×9 行列の固有値問題を解く必要があり，これが時間を費やす．最尤推定の計算に実験では Chojnacki ら [3] の FNS 法を用いたが，Leedan ら [15] の HEIV 法，菅谷ら [18] の射影ガウス・ニュートン法，金谷 [8, 11, 12] のくりこみ法を用いてもこれは同様である.

それに対して，提案法では反復の各ステップで 7 次元連立 1 次方程式を解くだけであり，固有値計算も SVD も行う必要がない．このためステップ当たりの計算量が少ない．しかし，誤差が大きくなるほど収束に時間がかかるので，ついには最適補正を上回る結果となっている.

6. 実画像実験

図 6 の 2 画像から図中に示した 100 個の対応点を手動で選び，それから各種の手法によって基礎行列を計算した．基礎行列 $\boldsymbol{F}$ の真値が不明なため，精度を残差 J で評価し，表 1 に各手法で得られた解による残差 J とその計算時間（秒）を示した.

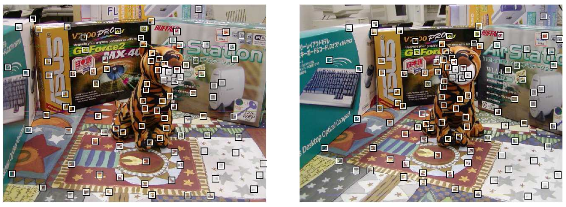

図 6: 実画像と対応点（100 個）.

表 1: 図 6 の実画像の対応点から求めた基礎行列の残差と実行時間（秒）.

手法	残差	実行時間
最小二乗法の SVD 補正	45.550	.00056
最尤推定の SVD 補正	45.567	.00644
最尤推定の最適補正	45.378	.00746
提案法	45.382	.00300
CFNS 法	45.567	.01304

この例では最尤推定の最適補正と提案法はほぼ同じ解に収束し，残差もほぼ同じであるが，提案法の計算時間が最適補正の約 40%であり，最小二乗法の SVD 補正を除けば最も効率的である．最小二乗法の SVD 補正および最尤推定の SVD 補正はより残差が大きく，CFNS 法は最尤推定の SVD 補正の精度しかない．

7. まとめ

本論文では 2 画像の対応点データから基礎行列をランク 2 という拘束のもとに最尤推定解を計算する新しい方法を提案した[11]．これは基礎行列の最適な特異値分解 (SVD) を直接にレーベンバーグ・マーカート (LM) 法で探索するものであり，3 次元座標やカメラ行列を未知変数に含める必要がない．シミュレーションにより精度を KCR 下界と比較し，提案法が一般に前報 [18] に示した最適補正よりもさらに高精度であり，かつ実行時間も減少することを示した．ただし，大きい誤差に対するロバスト性は最適補正のほうが上回るようである．

謝辞: 本研究の一部は文部科学省科学研究費基盤研究 C (No. 17500112) の助成によった．オーストラリアの Adelaide 大学の Wojciech Choinacki 博士にからは CFNS 法のプログラムを提供して頂き，有益な討論をして頂いたことに感謝します.

参考文献

[1] A. Bartoli and P. Sturm, Nonlinear estimation of fundamental matrix with minimal parameters, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **26**-3 (2004-3), 426–432.

[2] N. Chernov and C. Lesort, Statistical efficiency of curve fitting algorithms, *Comput. Stat. Data Anal.*, **47**-4 (2004-11), 713–728.

[3] W. Chojnacki, M. J. Brooks, A. van den Hengel and D. Gawley, On the fitting of surfaces to data with covariances, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **22**-11 (2000-11), 1294–1303.

[4] W. Chojnacki, M. J. Brooks, A. van den Hengel and D. Gawley, A new constrained parameter estimator for computer vision applications¡/A¿, *Image Vis. Comput.*, **22**-2 (2004-2), 85–91.

[5] W. Chojnacki, M. J. Brooks, A. van den Hengel and D. Gawley, FNS, CFNS and HEIV: A unifying approach, *J. Math. Imaging Vision*, **23**-2 (2005-9), 175–183.

[6] R. I. Hartley, In defense of the eight-point algorithm, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **19**-6 (1997-6), 580–593.

[7] R. Hartley and A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2000.

[8] 金谷健一, コンピュータビジョンのためのくりこみ法, 情報処理学会論文誌, **35**-2 (1994-2), 201–209.

[9] 金谷健一, 当てはめ問題の最適推定と精度の理論限界, 情報処理学会論文誌, **36**-8 (1995-8), 1865–1873.

[10] 金谷健一, 幾何学的補正問題の最適計算と精度の理論限界, 情報処理学会論文誌, **37**-3 (1996-3), 363–370.

[11] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands, 1996; Dover, New York, 2005.

[12] 金谷 健一, くりこみ法その後: 波紋と発展, 情報処理学会研究報告, 2003-CVIM-139-5 (2003-7), 33–40.

[13] 金谷 健一, 最尤推定の最適性と KCR 下界, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-147-8 (2005-1), 59–64.

[14] 金谷健一, 菅谷保之, 制約付きパラメータ推定のための拡張 FNS 法, 情報処理学会研究報告, 2007-CVIM-158 (2007-3).

[15] Y. Leedan and P. Meer, Heteroscedastic regression in computer vision: Problems with bilinear constraint, *Int. J. Comput. Vision.*, **37**-2 (2000-6), 127–150.

[16] 右田剛史, 尺長健, 未校正画像対中の点対応に基づくエピポールの 1 次元探索法, 情報処理学会研究報告, CVIM-153-64 (2006-3), 413–420.

[17] 坂本雅俊, 金谷健一, 菅谷保之, 自由に撮影した画像による全周パノラマ生成のための射影変換の最適化, 情報処理学会研究報告, 2006-CVIM-155-28 (2006-9), 219–226.

[18] 菅谷保之, 金谷健一, 基礎行列の高精度計算法とその性能比較, 情報処理学会研究報告, 2006-CVIM-153-32 (2006-3), 207–214.

[19] Z. Zhang and C. Loop, Estimating the fundamental matrix by transforming image points in projective space, *Comput. Vis. Image Understand.*, **82**-2 (2001-5), 174–180.

[11] 以下にプログラムを公開している.
`http://www.iim.ics.tut.ac.jp/~sugaya/public.html`