

消失点推定とカメラキャリブレーションの 統計的信頼性

金谷 健一* 浦澤 康二*

Statistical Confidence of Vanishing Point Estimation and Camera Calibration

Kenichi KANATANI Koji URASAWA

This paper presents a rigorous mathematical formulation for evaluating error behaviors and reliabilities in the computation of vanishing points for sensing 3-D from images. First, an optimal vanishing point estimation scheme is constructed by adopting a simple statistical model which assumes that image errors result from edge fitting in digital images. Then, reliability of thus computed optimal estimate is theoretically evaluated, and the confidence level of the estimate is statistically deduced in quantitative terms. Finally, a simple scheme of calibrating the camera focal length is constructed in such a way that the reliability of the computation is maximized.

Key Words : 3-D Image Sensing, Vanishing Point, Camera Calibration, Reliability of Computation, Statistical Inference.

1. 序 論

ロボットの制御や環境認識において視覚センサの果たす役割は大きい。その場合、画像上の消失点の計算が基礎となることが多い^{10,11,14,15,17,18}。これは、空間中で平行な直線群の画像上での消失点からその直線群の3次元方向が直接的に計算できるからである^{6,7}。したがって、正確な3次元計測のためには消失点が正確に求まることが不可欠である。

一方、画像から3次元位置や方向を計算するにあたっては、用いたカメラのパラメータ（レンズの中心の位置、光軸の向き、焦点距離など）が既知であることが条件である。これらのパラメータを決定するにはあらかじめカメラに正確なキャリブレーションを行なっておく必要がある^{1-5,10}。そのカメラキャリブレーションにおいても消失点の計算が本質的な役割を果たす。

従来から画像による3次元計測の精度を向上させるた

めの装置や処理方法や計算技法上のいろいろな工夫がなされてきたが^{12,13,16}、その計算結果の精度は実データによる実験や計算機シミュレーションなどによって経験的に評価されることが多かった。しかし、今後のロボティクスの発展のためには画像の誤差挙動の統計的モデルに立脚した理論的評価が必要である。そのためには、精度の限界を数学的に正しく与え、その限界を達成する最適推定法を構成し、さらに実際のデータから計算された結果の精度を理論的に評価するための数学的方法論が必要となる。

筆者らはこのための数学的な枠組みを提案してきたが^{8,9}、本論文では3次元計測のための消失点の計算の誤差およびその信頼性を数学的に厳密に定式化する。まず、デジタル画像のエッジ当てはめの誤差を記述する簡単な統計モデルに基づいた消失点の最適推定法を導出する。次にその最適推定値の信頼性を理論的に評価し、推定値の統計的信頼水準を定量的に導く。最後に、これに基づいて、カメラの焦点距離のキャリブレーションの簡単な方法を、信頼性が最大となるように構成する。

原稿受付 1991年3月5日

* 群馬大学工学部

本論文の結果は消失点の計算に基づいた3次元計測およびカメラキャリブレーションに不可欠であるばかりでなく、ロボットの画像による3次元計測一般に数学的基礎を与えるものであり、今後ますます重要性が増すと思われる。

2. 透視変換とNベクトル

次のようなカメラの撮像モデルを考える^{6,7)}。Z軸がカメラの光軸と一致するようにXYZ座標系をとり、原点Oをレンズの中心(「視点」)とみなし、平面 $Z=f$ を画像面とする。ただし、 f はレンズの中心と撮像面との距離であり、「焦点距離」と呼ぶ(単位は「画素」)。空間中の点は視点Oとその点を結ぶ直線と、画像面 $Z=f$ との交点に投影される(Fig. 1)。この撮像モデルは実際のカメラと厳密に一致している必要はなく、仮想的なものでよいが、ほぼ一致していると仮定する。

視点Oから画像面上の点Pを指す単位ベクトル m を点Pの「Nベクトル」と呼び、視点Oと画像面上の直線 l を含む平面の単位法線ベクトル n (二つの向きのうちどちらでもよい)を直線 l の「Nベクトル」と呼ぶ^{6,7,10)}。Fig. 1からわかるように、点Pが直線 l の「上にある」、あるいは直線 l が点Pを「通る」ことは

$$(m, n) = 0 \quad (1)$$

と表せる。ただし、 (\cdot, \cdot) はベクトルの内積を表す。点や直線の位置をNベクトルで表せば、画像面上で原点から無限に離れた点でも表すことができるので、計算が常に有限の範囲で行なえる。

3. エッジ当てはめの信頼性のモデル

多くのデジタル画像処理ではHough変換やエッジ作用素の適用によって直線部分を検出し、細線化等の処理によって画素の列としてのエッジセグメントを求め、

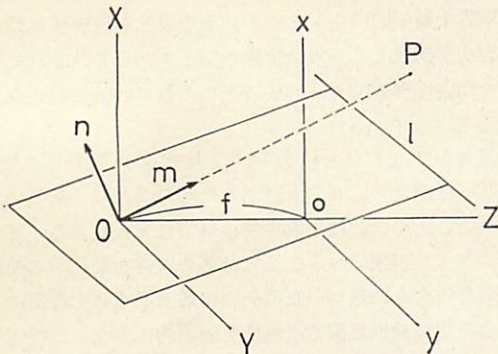


Fig. 1 Camera imaging model and N-vectors representing a point and a line on the image plane.

さらに最小2乗法等によって、直線をサブ画素の精度で当てはめる。このようにして、複数のエッジセグメントに当てはめた直線の共通の交点として消失点が推定されるとすると、計算された消失点の精度は各エッジに当てはめた直線の精度に帰着する。そこでエッジ当てはめの誤差の統計モデルが必要となる。

今、画像上のあるエッジセグメントに当てはめた直線のNベクトルが誤差のないとき n であるとする。画像に誤差があるとき、これに誤差 Δn が加わった $n + \Delta n$ が得られるとする。誤差 Δn を期待値0の確率変数ベクトルとみなす。以下では、誤差 Δn は n に比べて微小量であり、誤差の挙動は第1近似によって記述できるとする。定義よりNベクトルは単位ベクトルであるから、誤差 Δn は第1近似において n に直交しなければならない。このとき $n + \Delta n$ も第1近似において単位ベクトルである。

誤差 Δn の大きさおよびその方向の分布を特徴づける基本的な量は「共分散行列」

$$V[n] = E[\Delta n \Delta n^T] \quad (2)$$

である。ただし、 $E[\cdot]$ は期待値を表し、 Δn^T は列ベクトル Δn の転置を表す。この共分散行列の具体的な形はすでに筆者らによって、画像の誤差モデルに基づいて導かれている⁸⁾。その証明には多くの数学的準備と長い導出過程を要するので、ここでは結果のみを示す。

[定理1] 長さ w 、方向ベクトル u 、中心ベクトル m_G のエッジセグメントに当てはめた直線のNベクトル n の共分散行列 $V[n]$ は次のように与えられる。

$$V[n] \approx \frac{6\kappa}{w^3} uu^T + \frac{\kappa}{2f^2w} m_G m_G^T \quad \square \quad (3)$$

ここで w は画素を単位とするエッジの長さであり、 f は計算に用いた焦点距離(単位は画素)である(カメラの焦点距離に一致している必要はない)。 m_G はそのエッジセグメントの中心点のNベクトルであり、 u はそのエッジセグメントの方向を表す単位ベクトルで、

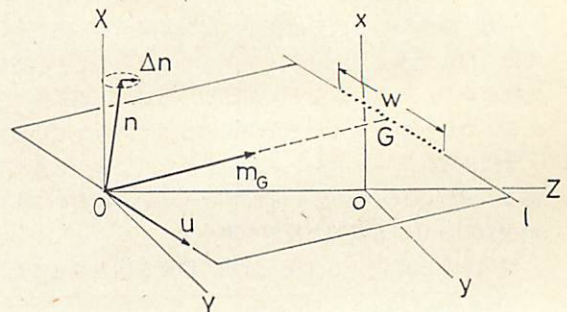


Fig. 2 Line fitting to an edge segment.

$$u = n \times m_G \quad (4)$$

と定義される (Fig. 2). κ は「解像度定数」と呼ばれる定数であり、

$$\kappa = \epsilon^2 / r \quad (5)$$

と表せる⁹⁾. ここに ϵ は各エッジ点の平均的ずれ (標準偏差) を画素の単位で表した「画像精度」であり、 r は「エッジ密度」すなわち単位長さ当たりのエッジ点の数 (単位は (画素)⁻¹) である⁹⁾. 例えば、各エッジ点が 1 画素の精度 ($\epsilon \approx 1$) で求められ、1 画素間隔 ($r \approx 1$) で並んでいれば、 $\kappa \approx 1$ となる (厳密には縦、横のエッジは 45° 斜めのものに比べて $\sqrt{2}$ 倍だけ密であるが、その違いは考えない). したがって、通常画像処理では解像度定数 κ は 1 が限界とみなせる. もちろん、アプリオリな知識や拘束条件を当てはめてこれ以上の精度を達成することもできる. そこで、 $\kappa < 1$ のときこれを「サブ画素精度」と呼ぶ.

4. 消失点の最適推定

画像上に N 本の直線があり、 $\{n_\beta\}$ をそれぞれの N ベクトルとする. これらの共通の交点を求めたいとする. 求めるべき点の N ベクトルを m とすると、(1) 式より $(m, n_\beta) = 0, \beta = 1, \dots, N$ でなければならない (Fig. 3). したがって、基本的には最小 2 乗法によって $\sum_{\beta=1}^N (m, n_\beta)^2 \rightarrow \min$ となる N ベクトル m を計算すればよいが、このままの形では適切でない. それぞれの直線はそれぞれ信頼度が異なり、大きくずれた直線が一つでもあれば結果がそれに大きく影響されるからである. したがって、信頼性の高い直線は大きい重みを、信頼性の低い直線は小さい重みをつけた「重みつき最小 2 乗法」を用いるべきである. これを考慮した「最尤推定法」としての最適な推定法は次のようになる.

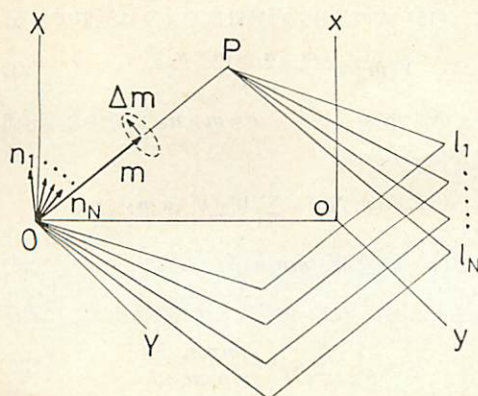


Fig. 3 Estimation of the common intersection of concurrent lines on the image plane.

[定理 2] N ベクトルが $n_\beta, \beta = 1, \dots, N$ の直線の共通の交点の N ベクトル m を推定する重みつき最小 2 乗法

$$\sum_{\beta=1}^N W_\beta (m, n_\beta)^2 \rightarrow \min \quad (6)$$

の最適な重みは次のように与えられる.

$$W_\beta = \frac{1}{(m, V[n_\beta]m)} \quad \square \quad (7)$$

[証明] n_β を誤差のない N ベクトルとし、これに誤差 Δn_β が加わった $n_\beta' = n_\beta + \Delta n_\beta$ が観測されるとする. 誤差のないデータ n_β に対しては $(m, n_\beta) = 0$ であるこれに対して生じる誤差を $\epsilon_\beta = (m, n_\beta') = (m, \Delta n_\beta)$ と置く. その分散は

$$\begin{aligned} \sigma_\beta^2 &= E[(m, \Delta n_\beta)^2] = (m, E[\Delta n_\beta \Delta n_\beta^T]m) \\ &= (m, V[n_\beta]m) \end{aligned} \quad (8)$$

で与えられる. 誤差 ϵ_β の分布を互いに独立な正規分布とみなすとその分布密度が

$$\prod_{\beta=1}^N \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\beta^2}} e^{-\frac{\epsilon_\beta^2}{2\sigma_\beta^2}} \right) = \left(\prod_{\beta=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\beta^2}} \right) e^{-\sum_{\beta=1}^N \frac{\epsilon_\beta^2}{2\sigma_\beta^2}} \quad (9)$$

と表せる. この分布の「母数」 m をこれが最大になるように推定すること (「最尤推定」) は

$$\sum_{\beta=1}^N \frac{\epsilon_\beta^2}{\sigma_\beta^2} = \sum_{\beta=1}^N \frac{(m, \Delta n_\beta)^2}{\sigma_\beta^2} = \sum_{\beta=1}^N \frac{(m, n_\beta')^2}{\sigma_\beta^2} \quad (10)$$

を最小にすることを意味する. これを (6) と比較すると、最適な重みは $W_\beta = 1/\sigma_\beta^2 = 1/(m, V[n_\beta]m)$ で与えられることがわかる. \square

この理論的に最適な重みはこれから計算しようとする m を含んでいるので、実際には何らかの推定値 (例えば重みなしで計算した推定値) を用いることになる.

前節で示したように、各直線の N ベクトルの共分散行列は (3) 式で与えられるが、通常は各エッジセグメントの長さが焦点距離 f に比べて短いので、各 n_β の共分散行列は次のように近似できる.

$$V[n_\beta] \approx \frac{6\kappa}{w_\beta^3} (n_\beta \times m_{G\beta})(n_\beta \times m_{G\beta})^T \quad (11)$$

ただし、 w_β および $m_{G\beta}$ はそれぞれ各エッジセグメントの長さおよび中心ベクトルである. これを用いると (7) 式の最適重みは次のように表せる.

$$W_\beta \approx \frac{w_\beta^3}{6\kappa |m n_\beta m_{G\beta}|^2} \quad (12)$$

ただし、 $|abc| = (a, b \times c) = (b, c \times a) = (c, a \times b)$ はベクトル a, b, c のスカラー三重積である ($(a, (bb^T)a) = (a, b)^2$ の関係にも注意).

最適重み W_β を用いた最小 2 乗法の解は次のように与えられる.

[定理 3] N ベクトルが $\{n_\beta\}$ の直線に対する最適重み W_β による最小 2 乗法で得られる交点の N ベクトルはモーメント行列

$$N = \sum_{\beta=1}^N W_{\beta} n_{\beta} n_{\beta}^T \quad (13)$$

の最小固有値に対する単位固有ベクトルで与えられる。 □

[証明] 次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=1}^N W_{\beta} (m, n_{\beta})^2 &= \left(m, \sum_{\beta=1}^N W_{\beta} n_{\beta} n_{\beta}^T m \right) \\ &= (m, Nm) \end{aligned} \quad (14)$$

N は半正値対称行列であるから、上の2次形式が最小となるのは m が N の最小固有値に対する固有ベクトルのときである。 □

5. 最適推定による消失点の信頼性

次に前節の最適推定によって計算した消失点の信頼性を評価すると、次の結果が得られる。

[定理4] モーメント行列 N による最適推定で定まる交点の N ベクトルを m とする。 m 以外の N の単位固有ベクトル u, v を $\{u, v, m\}$ が正規直交系をつくるようにとる。 u, v に対する固有値をそれぞれ λ_u, λ_v とすると、各直線が独立であれば m の共分散行列は次のように与えられる。

$$V[m] = \frac{uu^T}{\lambda_u} + \frac{vv^T}{\lambda_v} \quad \square \quad (15)$$

[証明] 各 n_{β} に誤差 Δn_{β} が加わると、モーメント行列 N は (13) 式より、その変化量が第1近似において

$$\Delta N = \sum_{\beta=1}^N W_{\beta} (\Delta n_{\beta} n_{\beta}^T + n_{\beta} \Delta n_{\beta}^T) \quad (16)$$

となる。 m は誤差がなければ N の固有値0の固有ベクトルであるから、「固有値問題の摂動法の定理」⁷⁾により、第1近似において次のように摂動する。

$$\Delta m = -\frac{(u, \Delta Nm)}{\lambda_u} u - \frac{(v, \Delta Nm)}{\lambda_v} v \quad (17)$$

誤差のないデータに対して $(n_{\beta}, m) = 0$ であるから、

$$\Delta Nm = \sum_{\beta=1}^N W_{\beta} (\Delta n_{\beta} n_{\beta}^T + n_{\beta} \Delta n_{\beta}^T) m$$

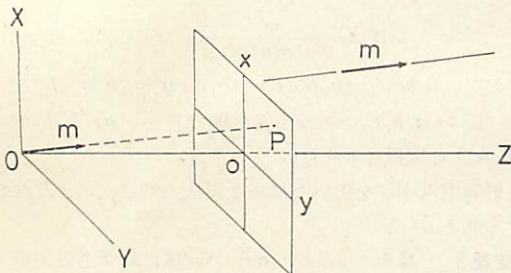


Fig. 4 The N -vector of the projection of a line in the scene indicates its 3-D orientation.

$$= \sum_{\beta=1}^N W_{\beta} (m, \Delta n_{\beta}) n_{\beta} \quad (18)$$

であり、(17) 式は次のように書ける。

$$\Delta m = -\sum_{\beta=1}^N W_{\beta} (m, \Delta n_{\beta}) \left(\frac{(u, n_{\beta})}{\lambda_u} u + \frac{(v, n_{\beta})}{\lambda_v} v \right) \quad (19)$$

仮定により各直線は独立であるから、共分散行列 $V[m] = E[\Delta m \Delta m^T]$ は各項ごとに計算して、総和すればよい。したがって

$$\begin{aligned} V[m] &= \sum_{\beta=1}^N \left[W_{\beta}^2 E[(m, \Delta n_{\beta})^2] \left(\frac{(u, n_{\beta})^2}{\lambda_u^2} uu^T \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(u, n_{\beta})(v, n_{\beta})}{\lambda_u \lambda_v} (uv^T + vu^T) + \frac{(v, n_{\beta})^2}{\lambda_v^2} vv^T \right) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

となる。(8) 式より $E[(m, \Delta n_{\beta})^2] = (m, V[n_{\beta}]m)$ であり、最適推定であるから $W_{\beta} = 1/(m, V[n_{\beta}]m)$ となっている。これとモーメント行列 N の定義および固有値、固有ベクトルの定義から

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=1}^N W_{\beta} (u, n_{\beta})^2 &= \left(u, \left(\sum_{\beta=1}^N W_{\beta} n_{\beta} n_{\beta}^T \right) u \right) \\ &= (u, Nu) = \lambda_u \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=1}^N W_{\beta} (u, n_{\beta})(v, n_{\beta}) &= \left(u, \left(\sum_{\beta=1}^N W_{\beta} n_{\beta} n_{\beta}^T \right) v \right) \\ &= (u, Nv) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=1}^N W_{\beta} (v, n_{\beta})^2 &= \left(v, \left(\sum_{\beta=1}^N W_{\beta} n_{\beta} n_{\beta}^T \right) v \right) \\ &= (v, Nv) = \lambda_v \end{aligned} \quad (23)$$

となり、(15) 式を得る。 □

N 本の直線がある“中心線”の両側にはほぼ対称に配置しており、間隔も著しく大きくはなく、また各直線に対する重みもほぼ等しいとする。このとき、その“中心線”の N ベクトルを n_c とすると、Fig. 3の幾何学的関係からモーメント行列 N の m 以外の固有ベクトルは近似的に $u \approx n_c, v \approx m \times n_c$ であり、 $\lambda_u \gg \lambda_v$ である。したがって、(15) 式の共分散行列は次のように近似できる。

$$V[m] \approx \frac{(m \times n_c)(m \times n_c)^T}{\lambda_v} \quad (24)$$

λ_v は N の固有ベクトル $v \approx m \times n_c$ に対する固有値であるから、

$$\begin{aligned} \lambda_v &= (v, Nv) = \sum_{\beta=1}^N W_{\beta} (v, (n_{\beta} n_{\beta}^T) v) \\ &\approx \sum_{\beta=1}^N W_{\beta} |mn_{\beta}|^2 \end{aligned} \quad (25)$$

となる。これに (12) 式を代入すれば次のように表せる。

$$\lambda_v \approx \frac{1}{6\kappa} \sum_{\beta=1}^N w_{\beta}^3 \frac{|mn_{\beta}|^2}{|mn_{\beta} m_{G\beta}|^2} \quad (26)$$

(24) 式と (26) 式から、消失点の信頼性を向上させる要因が次のように理解できる。

- 当然のことであるが、エッジの解像度定数が小さいほど共分散 $V[m]$ が減少する。
- 各エッジセグメントの長さ w_β が長いほど共分散 $V[m]$ が減少する。
- 直線間の間隔が大きいほど $|m u_c n_\beta|^2$ が大きく、したがって共分散 $V[m]$ が減少する。
- 消失点が画像の中央に近づくほど $|m u_\beta n_G \beta|^2$ が小さく、したがって共分散 $V[m]$ が減少する。

6. 焦点距離のキャリブレーション

前節までの技法を用いて消失点を計算するとき、2節で導入した透視変換が実際のカメラの撮像モデルに一致している必要はない。画像面上の点や直線を単位ベクトルで表すための仮想的なモデルと考えてよいからである。しかし、そのようにして求めた消失点から3次元方向を計算するには正確なモデル、特に正しい焦点距離の値が必要となる。

まず、消失点の定義を振り返ってみる。空間中の直線のカメラから遠ざかる一端を限りなく延長したときのその投影像はある1点に収束する。これをこの直線の消失点と呼ぶ。次の事実は Fig. 4 から明らかである。

[定理5] 空間中の直線が画像面上につくる消失点のNベクトルはその直線の3次元方向を表す。□

すなわち、消失点は直線の空間中の向きのみ依存する。したがって、空間中で互いに平行な直線は画像面上で共通の消失点をもつ。しかし、もし計算に用いた焦点距離が正しくなければ、そのNベクトルは直線の3次元方向に必ずしも一致しない。2節に示したNベクトルの定義から、焦点距離が変化するとNベクトルは次のように変化する。

[定理6] $m = (m_1, m_2, m_3)^T$ をある点の焦点距離 f に関するNベクトルとするとき、この点の焦点距離 f' に関するNベクトルは次のようになる。

$$\hat{m} = N \left[\begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ (f'/f)m_3 \end{array} \right] \quad \square \quad (27)$$

この結果から、正しい焦点距離を次のようにして計算することができる^{6,7,10}。

[定理7] 次の手順で焦点距離が計算できる。

1. 空間中で互いに直交する直線群を撮像する (Fig. 5)。
2. 仮の焦点距離 \hat{f} を用いて画像面上の消失点のNベクトル $m = (m_1, m_2, m_3)^T$, $m' = (m_1', m_2', m_3')^T$ を計算する。
3. 真の焦点距離 f を次式で計算する。

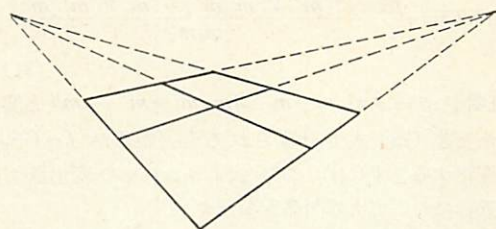


Fig. 5 Estimation of the focal length from the vanishing points of two sets of parallel lines that are mutually orthogonal in the scene.

$$f = \hat{f} \sqrt{\frac{m_1 m_1' + m_2 m_2'}{m_3 m_3'}} \quad \square \quad (28)$$

[証明] $m = (m_1, m_2, m_3)^T$, $m' = (m_1', m_2', m_3')^T$ は仮の焦点距離 \hat{f} に関するNベクトルであるから、真の消失点 f に関しては [定理6] よりそれぞれ

$$N \left[\begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ (f/\hat{f})m_3 \end{array} \right], N \left[\begin{array}{c} m_1' \\ m_2' \\ (f/\hat{f})m_3' \end{array} \right] \quad (29)$$

となる。[定理5] より、これらは互いに直交する直線群の3次元方向を表すから、内積が0になる。

$$m_1 m_1' + m_2 m_2' + \frac{f^2}{\hat{f}^2} m_3 m_3' = 0 \quad (30)$$

これから (28) 式が得られる。□

(28) 式からすぐに気づくのは、消失点が画像の原点から遠ざかるにつれ、根号の中の分子、分母がともに0に近づき、数値的不安定が生じる。これは当然で、消失点が画像の原点から離れていれば、画像に奥行き感がなくなり、焦点距離が変化しても画像が(スケール変化を除いて)変化しない。焦点距離が画像から定まる原理は奥行き感にあるから、焦点距離の信頼性を高めるにはなるべく奥行きのある画像を用いなければならない。

一方、消失点が画像の中央に近づけば、消失点を定める直線の投影像が短くなってエッジ当てはめの信頼性が低下したり、直線間隔が狭くなって消失点推定の信頼度が低下する。したがって、焦点距離の信頼性が最大となるのはこれらの要因が最適なバランスを保つときである。前節までの理論を用いれば、その最適なバランスが次のように解析的に導ける。

いま、仮の焦点距離 \hat{f} は真の焦点距離 f のよい近似であると仮定する。

[定理8] 空間中で互いに直交する直線群の消失点のNベクトルを $m = (m_1, m_2, m_3)^T$, $m' = (m_1', m_2', m_3')^T$ とする。 m, m' が互いに独立に求められたとすれば、得られる焦点距離 f の分散は、仮の焦点距離が真の焦点距離に一致している場合、次のように与えられる。

$$V[f] = \frac{f^2}{4} \frac{f^2(m', V[m]m') + (m, V[m']m)}{(m_3 m_3')^2} \quad (31)$$

[証明] データが $m \rightarrow m + \Delta m, m' \rightarrow m' + \Delta m'$ と変化したとき (28) 式で計算される焦点距離が $f \rightarrow f + \Delta f$ と変化するとすれば, (30) 式よりこれらの変化量は第 1 近似において次の関係を満たす.

$$\begin{aligned} &\Delta m_1 m_1' + m_1 \Delta m_1' + \Delta m_2 m_2' + m_2 \Delta m_2' \\ &+ \frac{2f \Delta f}{f^2} m_3 m_3' + \frac{f}{f} \Delta m_3 m_3' + \frac{f}{f} m_3 \Delta m_3' = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

ここで $\hat{f} = f$ と置けば

$$\begin{aligned} \Delta f &= -\frac{f}{2} \frac{\Delta m_1 m_1' + m_1 \Delta m_1' + \Delta m_2 m_2' + m_2 \Delta m_2' + \Delta m_3 m_3' + m_3 \Delta m_3'}{m_3 m_3'} \\ &= -\frac{f}{2} \frac{(m', \Delta m) + (m, \Delta m)}{m_3 m_3'} \end{aligned} \quad (33)$$

となる. 仮定により m と m' は独立なデータであるから, f の分散が次のようになる.

$$\begin{aligned} V[f] &= E[(\Delta f)^2] \\ &= \frac{f^2}{4} \frac{(m', E[\Delta m \Delta m^T]m') + (m, E[\Delta m' \Delta m'^T]m)}{(m_3 m_3')^2} \\ &= \frac{f^2}{4} \frac{(m', V[m]m') + (m, V[m']m)}{(m_3 m_3')^2} \quad (34) \end{aligned}$$

(31) 式の分子, 分母は先に述べた信頼性を左右する要因を表す項からなっているので, 最適なバランスが達成されるのは, (31) 式の分散が最小になることであることがわかる. (31) 式に (24), (26) 式を代入すれば次の近似式を得る.

$$V[f] \approx \frac{f^2}{4} \frac{1}{(m_3 m_3')^2} \left(\frac{|mm'nc|^2}{\lambda} + \frac{|mm'nc'|^2}{\lambda'} \right) \quad (35)$$

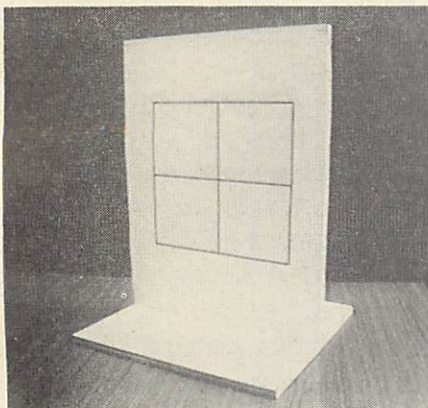


Fig. 6 A real image of the board designed for calibrating the focal length. A square grid pattern is drawn on it.

$$\lambda \approx \frac{1}{6\kappa} \sum_{\beta=1}^N w_{\beta}^3 \frac{|mn_c n_{\beta}|^2}{|mn_{\beta} m_{G\beta}|^2} \quad (36)$$

$$\lambda' \approx \frac{1}{6\kappa} \sum_{\beta=1}^{N'} w_{\beta}^3 \frac{|mn_c' n_{\beta}'|^2}{|mn_{\beta}' m_{G\beta}'|^2} \quad (37)$$

ただし, $n_{\beta}, \beta=1, \dots, N, n_{\beta}', \beta=1, \dots, N'$ はそれぞれの消失点を定義する直線群の N ベクトルであり, n_c, n_c' はそれぞれの“中心線”の N ベクトルである. また, $w_{\beta}, m_{G\beta}$ はそれぞれ N ベクトル n_{β} の直線が当てはめられたエッジセグメントの長さおよび中心の N ベクトルである. $w_{\beta}', m_{G\beta}'$ についても同様である.

このようにして分散が評価されれば, 統計学でよく知られているように, 計算される値の「信頼区間」が定量的に与えられる. 例えば分布を正規分布で近似すれば, 計算された焦点距離が f のとき, 真の焦点距離は信頼水準 $(100-a)\%$ で $f \pm \lambda_a \sqrt{V[f]}$ の範囲にあるとみなせる. ただし λ_a は正規分布の $a\%$ 点である (例えば $\lambda_5 = 1.96$).

7. 焦点距離の最適推定

前節で示したように, 画像上の消失点の位置によって焦点距離推定の信頼性が(35)式に従って変化する. 信頼性を保つ一つの方法は測定を何回も繰り返して, その平均をとることであるが, 単純に平均をとるのは適切ではない. 大きく偏った正しくないデータが一つでも混入すると結果が大きく影響されるからである. これを防ぐ方法は, 信頼性の高いデータには大きい重みを, 信頼性の低いデータには小さい重みをつけた「重みつき平均」をとることである. そして, その重みは得られる結果の信頼性が最大, すなわち分散が最小になるように決めればよい. このときの最適な重みは次のように与えられる. [定理 9] 独立なデータ $f_{\alpha}, \alpha=1, \dots, N$ の各分散が $V[f_{\alpha}]$ のとき, 最適な重みつき平均は次式で与えられ

Table 1 Focal length f_{α} , variance $V[f_{\alpha}]$, and optimal weight for ten measurements.

α	f_{α}	$V[f_{\alpha}]$	W_{α}
1	206.942	1091.712	0.000303
2	522.662	24.635	0.013423
3	551.018	9.621	0.034369
4	575.322	1.057	0.312835
5	588.870	0.733	0.451114
6	665.852	3.679	0.089880
7	675.818	5.501	0.060110
8	680.580	10.368	0.031893
9	722.831	56.581	0.005844
10	925.895	1447.349	0.000228

る。

$$\bar{f} = \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} f_{\alpha} \quad (38)$$

$$W_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{V[f_{\alpha}]}} / \sum_{\beta=1}^N \frac{1}{\sqrt{V[f_{\beta}]}} \quad \square \quad (39)$$

〔証明〕 仮定により各データは独立であるから、(38)式で与えられる \bar{f} の分散は次のように与えられる。

$$V[\bar{f}] = \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha}^2 V[f_{\alpha}] \quad (40)$$

これを $\sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} = 1$ の制約のもとで最小にすればよい。この制約に対する Lagrange 乗数 A を導入して

$$\sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha}^2 V[f_{\alpha}] - A \sum_{\alpha=1}^N (W_{\alpha} - 1) \quad (41)$$

を W_{α} で微分して 0 と置けば $2W_{\alpha}V[f_{\alpha}] - A = 0$ となる。これより $W_{\alpha} \propto 1/\sqrt{V[f_{\alpha}]}$ が得られ、(39)式が得られる。 \square

(39)式を(40)式に代入すれば、最適推定値の分散が次のように与えられる。

〔定理 10〕 最適推定値の分散は次のように与えられる。

$$V[\bar{f}] = 1 / \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{V[f_{\alpha}]} \quad \square \quad (42)$$

このようにして分散が評価されれば、前節で示したように、信頼区間が定量的に与えられる。例えば分布を正規分布で近似すれば、計算された焦点距離の最適推定値が \bar{f} のとき、真の焦点距離は信頼水準 $(100-a)\%$ で $\bar{f} \pm \lambda_{\alpha} \sqrt{V[\bar{f}]}$ の範囲にあるとみなせる。

データ f_{α} の分散 $V[f_{\alpha}]$ は (31) 式、あるいは (35) 式の近似で与えられる。これを評価するには解像度定数 κ 、したがって画像精度 ϵ やエッジ密度 γ を知る必要がある。このような画像定数をいちいち画像ごとに計算するのは不便のように思える。しかし、(39)式をよくみると、最適重み W_{α} は $V[f_{\alpha}]$ の定数倍の違いに影響されないから、これら画像定数は任意でよい。一方、(42)式の評価には、このままではこれらの画像定数が必要となる。これを避けるためには統計学でよく知られているように

$$s = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} (f_{\alpha} - \bar{f})^2} \quad (43)$$

とおけば、真の焦点距離を f とするとき

$$t = \sqrt{N-1} (f - \bar{f}) / s \quad (44)$$

が自由度 $N-1$ の t 分布を利用すればよい。こうすればこれはもはや $V[f_{\alpha}]$ の定数倍の違いには影響されない。

以上をまとめれば、信頼性を最大にする焦点距離のキャリブレーションが次の手順で与えられる。

1. 正方格子を描いた表示板を用意し、その画像を入力する (Fig. 6)。

2. 画像処理によって直線部分のエッジを検出し、直線を最小 2 乗法によって当てはめる。
3. 仮の焦点距離を、真の焦点距離のよい近似となるように適切に仮定し、これらの直線の N ベクトルを計算する。
4. [定理 2]、[定理 3] によってそれぞれの直線群の消失点の N ベクトルを最適重みつき最小 2 乗法によって推定し、それらの共分散行列を [定理 4] によって計算する。
5. [定理 7] によって真の焦点距離を計算し、[定理 8] によってその分散を計算する。
6. これを繰り返し、得られたデータに対して、[定理 9] によって最適重みつき平均によって最適推定値を計算し、[定理 10] によってその最適推定値の分散を計算する。
7. 真の焦点距離は信頼水準 $(100-a)\%$ で $\bar{f} \pm t_{\alpha} s / \sqrt{N-1}$ の範囲にあるとみなす。ただし t_{α} は自由度 $N-1$ の t 分布の $\alpha\%$ 点である (例えば $N=10$ のとき $t_5=2.262$)。

すなわち、何かを計算するたびに、その分散または共分散行列も同時に計算し、次のステップではそれに基づいた最適化を行う。これを各ステップごとに行えば、最終的に最適な推定値が得られるとともに、その信頼性も定量的に評価できることになる (具体的な画像の処理や計算の例は文献 (10) 参照)。

Table 1 は Fig. 6 の表示板の向きをいろいろ変えて、解像度定数を $\kappa=1$ として焦点距離 f_{α} およびその分散 $V[f_{\alpha}]$ と最適重み W_{α} を計算したものである。 $\alpha=1, 10$ は表示板が画像面にほぼ平行な場合であり、信頼性が著しく低下し、したがってほとんど 0 に近い重みが与えられていることがわかる。このように信頼性が定量的に評価でき、最適推定値が $\bar{f}=598.257$ 、95% 信頼区間が $568.879 \leq f \leq 627.534$ と与えられる。

また、第 4 節 (7) 式の最適重みを重みなしで推定した m を用いて近似したが、その結果の最適推定値を用いて最適重みを更新し、収束するまで反復することも考えられる。しかし、そうしても各 m の変化は約 0.0001%、各 f_{α} の変化は約 0.001%、最適推定値 \bar{f} の変化は約 0.0001%、95% 信頼区間の両端値の変化は約 0.03% であり、1 回の近似で十分である。

8. 結 論

本論文では 3 次元計測のための消失点の計算の誤差およびその信頼性を数学的に厳密に定式化し、それに基づいた最適推定法を導出するとともに、その最適推定値の信頼性を厳密に評価する理論を示した。そしてこれをカ

メラの焦点距離を定めるキャリブレーションに応用し、信頼性を最大化する実際的な手順を構成した。

序論でも述べたように、本論文の結果は消失点の計算に基づいた3次元計測およびカメラキャリブレーションに不可欠であるばかりでなく、ロボットの画像による3次元計測一般に数学的基礎を与えるものであり、今後ますます重要性が増すと考えられる。

参 考 文 献

- 1) B. Caprile and V. Torre: "Using vanishing points for camera calibration," *Int. J. Comput. Vision*, Vol.4, pp.127-140, 1990.
- 2) T. Echigo: "A camera calibration technique using three sets of parallel lines," *Machine Vision Appl.*, Vol.3, pp.159-167, 1990.
- 3) W. I. Grosky and L. A. Tamburino: "A unified approach to the linear camera calibration problem", *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, Vol.12, pp.663-671, 1990.
- 4) 伊藤 稔: "ロボットビジョンのモデリング", *日本ロボット学会誌*, Vol.7, No.2, pp.215-220, 1989.
- 5) 伊藤 稔, 石井 明: "反復法によらない自動カメラキャリブレーション", *電子通信学会技術研究報告*, PRL 85-16, pp.57-62, 1985.
- 6) K. Kanatani: *Group-Theoretical Methods in Image Understanding*, Springer, Berlin, F.R.G., 1990.
- 7) 金谷健一: "画像理解/3次元認識の数理", 森北出版, 1990.
- 8) K. Kanatani: "Geometric Computation for Machine Vision", Oxford Univ. Press, Oxford, U.K., 1992 (to appear).
- 9) 金谷健一, 川島孝夫: "画像データの幾何学的構造の説検定", *情報処理学会論文誌*, Vol.31, No.6, pp.879-886, 1990.
- 10) K. Kanatani and Y. Onodera: "Anatomy of camera calibration using vanishing points", *IEICE Trans.*, Vol.E 74, No.10, pp.3369-3378, 1991.
- 11) 金谷健一, 渡辺一成: "局所平面近似による道路形状復元", *日本ロボット学会誌*, Vol.8, No.4, pp.407-412, 1990.
- 12) S.-P. Liou and R. C. Jain: "Road following using vanishing points," *Comput. Vision Graphics Image Process.*, Vol.39, pp.116-130, 1987.
- 13) M. J. Magee and J. K. Aggarwal: "Determining vanishing points from perspective images", *Comput. Vision Graphics Image Process.*, Vol.26, pp.256-267, 1984.
- 14) 松島録郎, 恩田邦雄, 青木由直: "変換の性質を利用した無限遠点抽出法", *電子情報通信学会論文誌 (D)*, Vol. J70-D, No.5, pp.1051-1052, 1987.
- 15) P. G. Mulgaonkar, L. G. Shapiro and R. M. Haralick: "Shape from perspective: A rule-based approach", *Comput. Vision Graphics Image Process.*, Vol.36, pp.298-320, 1986.
- 16) 中谷広正, 北橋忠広: "無限遠点を用いた情景中の対象物の3次元復元", *電子通信学会論文誌 (D)*, Vol. J68-D, No.8, pp.1481-1488, 1975.
- 17) 中谷広正, 北橋忠広: "反復演算による無限遠点抽出", *電子通信学会論文誌 (D)*, Vol. J68-D, No.8, pp.1541-1542, 1975.
- 18) 田中俊江, 川島孝夫, 金谷健一: "平行性仮説による多面体の3次元形状復元", *電子情報通信学会論文誌 (D-II)*, Vol. J72-D-II, No.4, pp.517-525, 1989.
- 19) R. Weiss, H. Nakatani and M. Riseman: "An error analysis for surface orientation from vanishing points", *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, Vol.12, No.12, pp.1179-1185, 1991.