

## 不均一な誤差分布をもつ空間データからの 3次元回転の最適計算

原 裕 貴<sup>†1</sup> 新 妻 弘 崇<sup>†1</sup> 金 谷 健 一<sup>†1</sup>

3次元データ間の回転を最適に計算する新しい方法を示す。3次元データは2次元データと異なり、その計測の過程から空間的に不均一な非等方正誤差分布をもつことが特徴である。これに対して Ohta らのくりこみ法による解法が知られているが、本論文では Ohta らと同様に3次元回転の四元数表現を用い、Chojnacki らの FNS 法を用いて厳密な最尤推定解を得る手順を導く。例としてステレオ視によって復元した3次元データを考え、ステレオ復元の誤差特性を解析して3次元回転を最適に計算する。その結果から、普通に用いられている方法は適切でないことが示される。そして、Ohta らのくりこみ法はほぼ最適な解を計算することを確認し、提案手法はわずかではあるがさらに精度の高い解を計算することを示す。

### Optimal Computation of 3-D Rotation from Space Data with Inhomogeneous Noise Distributions

HIROKI HARA,<sup>†1</sup> HIROTAKA NIITSUMA<sup>†1</sup>  
and KENICHI KANATANI<sup>†1</sup>

We present a new method for optimally computing the 3-D rotation of 3-D data. Unlike 2-D data, the noise in 3-D data is inherently inhomogeneous and anisotropic, reflecting the characteristics of the 3-D sensing used. To cope with this, Ohta and Kanatani introduced a technique called “renormalization”. Following them, we represent a 3-D rotation in terms of a quaternion and compute an exact maximum likelihood solution using the FNS of Chojnacki et al. As an example, we consider 3-D data obtained by stereo vision and optimally compute the 3-D rotation by analyzing the noise characteristics of stereo reconstruction. We show that the widely used method is not suitable for 3-D data. We confirm that the renormalization of Ohta and Kanatani indeed computes almost an optimal solution and that, although the difference is small, the proposed method can compute an even better solution.

<sup>†1</sup> 岡山大学大学院自然科学研究科  
Department of Computer Science, Okayama University, Japan

### 1. ま え が き

ステレオカメラを搭載したロボットがシーンの3次元形状復元を行いながら自身の位置決めを行うことは SLAM (Simultaneous Localization and Mapping) と呼ばれ、今日の自律走行ロボット研究の最も中心的なテーマの一つである。そのために重要なのは2時刻間のロボットの移動(並進と回転)の計算である。これはロボットに相対的なシーンの並進と回転を計算して得られる。並進は着目する3次元点の重心の変化から直ちに計算されるが、回転が問題となる。なぜなら、3次元データは2次元データと異なり、その計測の過程から必然的に空間的に不均一な非等方正誤差分布をもつからである。これを無視すると正確な回転が計算できない。

同様の問題が画像やレンジファインダーを用いて物体の3次元全体形状を復元する場合にも生じる。なぜなら、カメラやセンサーから見えている部分しか復元できないため、複数の視点から3次元形状を復元し、共通部分を張り合わせなければならないからである。この場合も用いたカメラやセンサーのやその向きの違いから各部分の計測結果は異なる誤差特性をもっていて、これを無視すると正確な張り合わせができない。

このような問題はビジョンに限らず、地球科学においても、異なる衛星位置からの地表の計測データを合成する問題でも生じる<sup>4)</sup>。このように、回転推定は多くの問題において重要な関心事であり、1980年代から精力的に研究されたが<sup>1),3),6),7),12),23)</sup>、ほとんどすべてが各点に一樣等方誤差を仮定するものであった。得られた方法は数学的にはどれも同値であるが、最も簡明な特異値分解による方法<sup>11),12),23)</sup>(付録 A.1)である。

しかし、一樣等方誤差の仮定は3次元データに対しては非現実的である。画像から抽出した特徴点に対しては、画像自体に特別の方向性がない限り、各点の  $x, y$  座標の誤差分布は同じであると仮定するのが現実的であるが、3次元データはステレオ視やレンジファインダーなどの何らかのセンサーを用いて計測しなければならない。このとき、計測値の誤差はセンサーに対する(“見えない”)奥行き方向に大きく、それに直交する(“見える”)方向には小さい。

3次元データの誤差分布が必然的に大きな不均一性をもつことを指摘し、そのような誤差分布に対して最尤推定の意味で最適な回転の計算法を初めて定式化したのは Ohta ら<sup>22)</sup>である。しかし、彼らは解法にくりこみ法を用いた(付録 A.2)。くりこみ法は重み付き最小二乗解の誤差解析によって偏差を除去し、精度を最尤推定解と統計的に等価にする操作であるが<sup>14)</sup>、解自体が最尤推定解と一致するわけではない。後に Chojnacki ら<sup>2)</sup>はくりこみ法と類似の方法で最尤推定解そのものを計算する FNS 法を提案した。最尤推定解は Leedan

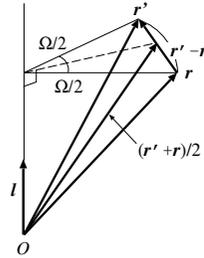


図1 回転の幾何学的関係.

ら<sup>20)</sup> や Matei ら<sup>21)</sup> の HEIV 法によっても計算される.

本論文では, Ohta ら<sup>22)</sup> にならって回転の四元数表現を用い, Chojnacki ら<sup>2)</sup> の FNS 法によって厳密な最尤推定解を得る手順を導く. そして例としてステレオ視によって復元した 3 次元データを考え, ステレオ復元の誤差特性を解析して 3 次元回転を最適に計算するとともに, 解を精度の理論限界 (KCR 下界<sup>14),17)</sup>) と比較する. その結果から, 広く用いられている一様等方誤差を仮定する最適解法<sup>1),3),6),7),12),23)</sup> は適切でないことが示される. そして, Ohta ら<sup>22)</sup> のくりこみ法はほぼ最適な解を計算することを確認し, 提案手法はわずかではあるがさらに精度の高い解を計算することを示す.

## 2. 回転の四元数表現

回転軸  $l$  (単位ベクトル) の右ねじ周りの角度  $\Omega$  の回転によって点  $r$  が点  $r'$  に移動したとする. 幾何学的関係から次の関係が得られる (図 1).

$$r' - r = 2 \tan \frac{\Omega}{2} l \times \frac{r + r'}{2} \quad (1)$$

これは次のように書き直せる.

$$q_0(r' - r) - q_l \times (r' + r) = 0 \quad (2)$$

ただし, 次のように置いた.

$$q_0 = \cos \frac{\Omega}{2}, \quad q_l = l \sin \frac{\Omega}{2} \quad (3)$$

定義より  $q_0^2 + \|q_l\|^2 = 1$  であるから,

$$q = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_l \end{pmatrix} \quad (4)$$

と定義すれば, これは単位ベクトルであり, 「四元数<sup>\*1)</sup>」と呼ばれる<sup>9),10)</sup>. 逆に四元数  $q$  が得られれば回転角  $\Omega$  と回転軸  $l$  は次のように求まる ( $\mathcal{N}[\cdot]$  は単位ベクトルへの正規化).

$$\Omega = 2 \cos^{-1} q_0, \quad l = \mathcal{N}[q_l] \quad (5)$$

以下, ベクトル  $a$  と行列  $T$  の積  $a \times T$  を,  $a$  と  $T$  の各列のベクトル積を列とする行列と定義する. 定義より  $a = (a_i)$  と単位行列  $I$  に対して

$$a \times I = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

であり, これは反対称行列である ( $(a \times I)^T = -a \times I$ ). そして恒等式  $(a \times I)b = a \times b$  ( $(a \times I)T = a \times T$  が成り立つ. また,  $T(a \times I)^T$  を  $T \times a$  と表記する.

## 3. 四元数表現の最尤推定

回転前の位置  $r_\alpha$  と回転後の位置  $r'_\alpha$  が測定されているとする ( $\alpha = 1, \dots, N$ ). 測定は誤差を含むとし,  $r_\alpha, r'_\alpha$  の共分散行列をそれぞれ  $\epsilon^2 V_0[r_\alpha], \epsilon^2 V_0[r'_\alpha]$  とする.  $\epsilon$  は誤差の絶対的な大きさを表す定数 (「ノイズレベル」) であり,  $V_0[r_\alpha], V_0[r'_\alpha]$  は誤差の分布を表す行列 (「正規化共分散行列」) である. 回転の四元数表現の最尤推定は, 回転前後の誤差のない位置を  $\bar{r}_\alpha, \bar{r}'_\alpha$  とするとき, 「マハラノビス距離」 ( $1/2$  は便宜的な係数)

$$J = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N (r_\alpha - \bar{r}_\alpha, V_0[r_\alpha]^{-1} (r_\alpha - \bar{r}_\alpha)) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N (r'_\alpha - \bar{r}'_\alpha, V_0[r'_\alpha]^{-1} (r'_\alpha - \bar{r}'_\alpha)) \quad (7)$$

を次の条件のもとで最小化するものである.

$$q_0(\bar{r}'_\alpha - \bar{r}_\alpha) - q_l \times (\bar{r}'_\alpha + \bar{r}_\alpha) = 0 \quad (8)$$

ただし, ベクトル  $a, b$  の内積を  $(a, b)$  と書く. 従来から研究された問題<sup>1),6),7),12),23)</sup> は各点の誤差がどの点に対しても回転の前後で同一の等方分布と仮定するものであり, これは  $V_0[r_\alpha] = V_0[r'_\alpha] = I$  の場合に相当する. この場合は回転前のみ, あるいは回転後のみに誤差があると仮定しても同じ解となる<sup>8)</sup>. しかし, 不均一誤差分布の場合は回転前後の両方の誤差分布が解に影響する. 式 (8) に対するラグランジュ乗数  $\lambda_\alpha$  を導入すれば, 式 (8) のもとで式 (7) を最小にする解は

\*1 厳密にはその演算を指定する代数系と合わせて四元数と呼ぶが<sup>9),10)</sup>, 本論文では四元数代数系は用いない.

$$\begin{aligned} \tilde{J} = & \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{r}_\alpha - \bar{\mathbf{r}}_\alpha, V_0[\mathbf{r}_\alpha]^{-1}(\mathbf{r}_\alpha - \bar{\mathbf{r}}_\alpha)) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{r}'_\alpha - \bar{\mathbf{r}}'_\alpha, V_0[\mathbf{r}'_\alpha]^{-1}(\mathbf{r}'_\alpha - \bar{\mathbf{r}}'_\alpha)) \\ & - \sum_{\alpha=1}^N (\boldsymbol{\lambda}_\alpha, q_0(\bar{\mathbf{r}}'_\alpha - \bar{\mathbf{r}}_\alpha) - \mathbf{q}_l \times (\bar{\mathbf{r}}'_\alpha + \bar{\mathbf{r}}_\alpha)) \end{aligned} \quad (9)$$

を  $\bar{\mathbf{r}}_\alpha, \bar{\mathbf{r}}'_\alpha$  に関して微分して  $\mathbf{0}$  と置いて得られる<sup>16)</sup>. 関係  $(\boldsymbol{\lambda}_\alpha, \mathbf{q}_l \times \bar{\mathbf{r}}_\alpha) = -(\mathbf{q}_l \times \boldsymbol{\lambda}_\alpha, \bar{\mathbf{r}}_\alpha)$ ,  $(\boldsymbol{\lambda}_\alpha, \mathbf{q}_l \times \bar{\mathbf{r}}'_\alpha) = -(\mathbf{q}_l \times \boldsymbol{\lambda}_\alpha, \bar{\mathbf{r}}'_\alpha)$  に注意すると, 式 (9) の微分は次のようになる.

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{\mathbf{r}}_\alpha} \tilde{J} &= -V_0[\mathbf{r}_\alpha]^{-1}(\mathbf{r}_\alpha - \bar{\mathbf{r}}_\alpha) + q_0 \boldsymbol{\lambda}_\alpha - \mathbf{q}_l \times \boldsymbol{\lambda}_\alpha \\ \nabla_{\bar{\mathbf{r}}'_\alpha} \tilde{J} &= -V_0[\mathbf{r}'_\alpha]^{-1}(\mathbf{r}'_\alpha - \bar{\mathbf{r}}'_\alpha) - q_0 \boldsymbol{\lambda}_\alpha - \mathbf{q}_l \times \boldsymbol{\lambda}_\alpha \end{aligned} \quad (10)$$

各式を  $\mathbf{0}$  と置いて  $\bar{\mathbf{r}}_\alpha, \bar{\mathbf{r}}'_\alpha$  について解くと次のようになる.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}}_\alpha &= \mathbf{r}_\alpha - V_0[\mathbf{r}_\alpha](q_0 \boldsymbol{\lambda}_\alpha - \mathbf{q}_l \times \boldsymbol{\lambda}_\alpha) \\ \bar{\mathbf{r}}'_\alpha &= \mathbf{r}'_\alpha + V_0[\mathbf{r}'_\alpha](q_0 \boldsymbol{\lambda}_\alpha + \mathbf{q}_l \times \boldsymbol{\lambda}_\alpha) \end{aligned} \quad (11)$$

これらを式 (8) に代入すると次のようになる.

$$\begin{aligned} q_0(\mathbf{r}'_\alpha - \mathbf{r}_\alpha) + q_0^2(V_0[\mathbf{r}'_\alpha] + V_0[\mathbf{r}_\alpha])\boldsymbol{\lambda}_\alpha + q_0(V_0[\mathbf{r}'_\alpha] - V_0[\mathbf{r}_\alpha])(\mathbf{q}_l \times \boldsymbol{\lambda}_\alpha) \\ - \mathbf{q}_l \times (\mathbf{r}'_\alpha + \mathbf{r}_\alpha) - \mathbf{q}_l \times (q_0(V_0[\mathbf{r}'_\alpha] - V_0[\mathbf{r}_\alpha])\boldsymbol{\lambda}_\alpha) - \mathbf{q}_l \times (V_0[\mathbf{r}'_\alpha] \\ + V_0[\mathbf{r}_\alpha])(\mathbf{q}_l \times \boldsymbol{\lambda}_\alpha) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (12)$$

書き直すと次のようになる.

$$-q_0(\mathbf{r}'_\alpha - \mathbf{r}_\alpha) + \mathbf{q}_l \times (\mathbf{r}'_\alpha + \mathbf{r}_\alpha) = \mathbf{V}_\alpha \boldsymbol{\lambda}_\alpha \quad (13)$$

ただし, 行列  $\mathbf{V}_\alpha$  を次のように置いた.

$$\mathbf{V}_\alpha = q_0^2(V_0[\mathbf{r}'_\alpha] + V_0[\mathbf{r}_\alpha]) - 2q_0 \mathbf{S}[\mathbf{q}_l \times (V_0[\mathbf{r}'_\alpha] - V_0[\mathbf{r}_\alpha])] + \mathbf{q}_l \times (V_0[\mathbf{r}'_\alpha] + V_0[\mathbf{r}_\alpha]) \times \mathbf{q}_l \quad (14)$$

ここに  $\mathbf{S}[\cdot]$  は対称化作用素である ( $\mathbf{S}[\mathbf{A}] = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top)/2$ ).  $\mathbf{W}_\alpha = \mathbf{V}_\alpha^{-1}$  と置くと, 式 (13) より  $\boldsymbol{\lambda}_\alpha$  が次のように求まる.

$$\boldsymbol{\lambda}_\alpha = -\mathbf{W}_\alpha \begin{pmatrix} \mathbf{r}'_\alpha - \mathbf{r}_\alpha & (\mathbf{r}'_\alpha + \mathbf{r}_\alpha) \times \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}_l \end{pmatrix} = \mathbf{W}_\alpha \mathbf{X}_\alpha \mathbf{q} \quad (15)$$

ただし,  $\mathbf{q}$  は式 (4) の四元数であり,  $3 \times 4$  行列  $\mathbf{X}_\alpha$  を次のように置いた.

$$\mathbf{X}_\alpha = \begin{pmatrix} \mathbf{r}'_\alpha - \mathbf{r}_\alpha & (\mathbf{r}'_\alpha + \mathbf{r}_\alpha) \times \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (16)$$

式 (11) を式 (7) に代入すると次のようになる.

$$\begin{aligned} J = & \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \left( (V_0[\mathbf{r}_\alpha](q_0 \boldsymbol{\lambda}_\alpha - \mathbf{q}_l \times \boldsymbol{\lambda}_\alpha), q_0 \boldsymbol{\lambda}_\alpha - \mathbf{q}_l \times \boldsymbol{\lambda}_\alpha) \right. \\ & \left. + (V_0[\mathbf{r}'_\alpha](q_0 \boldsymbol{\lambda}_\alpha + \mathbf{q}_l \times \boldsymbol{\lambda}_\alpha), q_0 \boldsymbol{\lambda}_\alpha + \mathbf{q}_l \times \boldsymbol{\lambda}_\alpha) \right) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N (\boldsymbol{\lambda}_\alpha, \mathbf{V}_\alpha \boldsymbol{\lambda}_\alpha) \end{aligned} \quad (17)$$

これに式 (15) を代入すると次のようになる.

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{W}_\alpha \mathbf{X}_\alpha \mathbf{q}, \mathbf{V}_\alpha \mathbf{W}_\alpha \mathbf{X}_\alpha \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{q}, \mathbf{X}_\alpha^\top \mathbf{W}_\alpha \mathbf{W}_\alpha^{-1} \mathbf{W}_\alpha \mathbf{X}_\alpha \mathbf{q}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{q}, \mathbf{M} \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (18)$$

ただし,  $4 \times 4$  行列  $\mathbf{M}$  を次のように置いた.

$$\mathbf{M} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{X}_\alpha^\top \mathbf{W}_\alpha \mathbf{X}_\alpha \quad (19)$$

以上が Ohta ら<sup>22)</sup> が示した結果である.

#### 4. 最適化計算法

Ohta ら<sup>22)</sup> は式 (18) の最小化にくりこみ法を用いた. これは式 (18) を重み付き最小二乗法で解いた場合に生じる偏差を解析してそれを反復的に差し引く操作である. ここでは式 (18) を直接的に最小化することを考える. 式 (18) を  $q_\kappa, \kappa = 0, 1, 2, 3$  に関して微分すると次のようになる ( $M_{\kappa\lambda}$  は  $\mathbf{M}$  の  $(\kappa\lambda)$  要素).

$$\frac{\partial J}{\partial q_\kappa} = \sum_{\lambda=0}^3 M_{\kappa\lambda} q_\lambda + \frac{1}{2} (\mathbf{q}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_\kappa} \mathbf{q}) \quad (20)$$

式 (19) より行列  $\mathbf{M}$  の微分は次のようになる.

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_\kappa} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{X}_\alpha^\top \frac{\partial \mathbf{W}_\alpha}{\partial q_\kappa} \mathbf{X}_\alpha \quad (21)$$

そこで  $\partial \mathbf{W}_\alpha / \partial q_\kappa$  を評価する. 行列  $\mathbf{W}_\alpha$  は  $\mathbf{W}_\alpha = \mathbf{V}_\alpha^{-1}$  と定義されているので  $\mathbf{V}_\alpha \mathbf{W}_\alpha = \mathbf{I}$  の両辺を  $q_\kappa$  で微分する.

$$\frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial q_\kappa} \mathbf{W}_\alpha + \mathbf{V}_\alpha \frac{\partial \mathbf{W}_\alpha}{\partial q_\kappa} = \mathbf{O} \quad (22)$$

これから  $\partial \mathbf{W}_\alpha / \partial q_\kappa$  が次のようになる.

$$\frac{\partial \mathbf{W}_\alpha}{\partial q_\kappa} = -\mathbf{V}_\alpha^{-1} \frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial q_\kappa} \mathbf{W}_\alpha = -\mathbf{W}_\alpha \frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial q_\kappa} \mathbf{W}_\alpha \quad (23)$$

したがって式 (21) より  $(\mathbf{q}, \partial \mathbf{M} / \partial q_\kappa \mathbf{q})$  は次のように書ける .

$$\begin{aligned} (\mathbf{q}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_\kappa} \mathbf{q}) &= -(\mathbf{q}, \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{X}_\alpha^\top \mathbf{W}_\alpha \frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial q_\kappa} \mathbf{W}_\alpha \mathbf{X}_\alpha \mathbf{q}) = -\sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{W}_\alpha \mathbf{X}_\alpha \mathbf{q}, \frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial q_\kappa} \mathbf{W}_\alpha \mathbf{X}_\alpha \mathbf{q}) \\ &= -\sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{p}_\alpha, \frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial q_\kappa} \mathbf{p}_\alpha) \end{aligned} \quad (24)$$

ただし ,  $\mathbf{p}_\alpha$  を次のように定義した .

$$\mathbf{p}_\alpha = \mathbf{W}_\alpha \mathbf{X}_\alpha \mathbf{q} \quad (25)$$

次に  $\partial \mathbf{V}_\alpha / \partial q_\kappa$ ,  $\kappa = 0, 1, 2, 3$  を評価する . 式 (14) より次のようになる .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial q_0} &= 2q_0 (V_0[\mathbf{r}'_\alpha] + V_0[\mathbf{r}_\alpha]) - 2\mathcal{S}[\mathbf{q}_l \times (V_0[\mathbf{r}'_\alpha] - V_0[\mathbf{r}_\alpha])] \\ \frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial q_1} &= -2q_0 \mathcal{S}[\mathbf{i} \times (V_0[\mathbf{r}_\alpha] - V_0[\mathbf{r}'_\alpha])] + 2\mathcal{S}[\mathbf{i} \times (V_0[\mathbf{r}_\alpha] + V_0[\mathbf{r}'_\alpha]) \times \mathbf{q}_l] \\ \frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial q_2} &= -2q_0 \mathcal{S}[\mathbf{j} \times (V_0[\mathbf{r}_\alpha] - V_0[\mathbf{r}'_\alpha])] + 2\mathcal{S}[\mathbf{j} \times (V_0[\mathbf{r}_\alpha] + V_0[\mathbf{r}'_\alpha]) \times \mathbf{q}_l] \\ \frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial q_3} &= -2q_0 \mathcal{S}[\mathbf{k} \times (V_0[\mathbf{r}'_\alpha] - V_0[\mathbf{r}_\alpha])] + 2\mathcal{S}[\mathbf{k} \times (V_0[\mathbf{r}'_\alpha] + V_0[\mathbf{r}_\alpha]) \times \mathbf{q}_l] \end{aligned} \quad (26)$$

ただし ,  $\mathbf{i} = (1, 0, 0)^\top$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)^\top$ ,  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)^\top$  と置いた . 以上より  $(\mathbf{p}_\alpha, \partial \mathbf{V}_\alpha / \partial q_\kappa \mathbf{p}_\alpha)$  は次のようになる .

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_\alpha, \frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial q_0} \mathbf{p}_\alpha) &= 2q_0 (\mathbf{p}_\alpha, (V_0[\mathbf{r}'_\alpha] + V_0[\mathbf{r}_\alpha]) \mathbf{p}_\alpha) + 2(\mathbf{q}_l, \mathbf{p}_\alpha \times (V_0[\mathbf{r}'_\alpha] - V_0[\mathbf{r}_\alpha]) \mathbf{p}_\alpha) \\ (\mathbf{p}_\alpha, \frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial q_1} \mathbf{p}_\alpha) &= 2q_0 (\mathbf{i}, \mathbf{p}_\alpha \times (V_0[\mathbf{r}'_\alpha] - V_0[\mathbf{r}_\alpha]) \mathbf{p}_\alpha) \\ &\quad + 2(\mathbf{i}, \mathbf{p}_\alpha \times (V_0[\mathbf{r}'_\alpha] + V_0[\mathbf{r}_\alpha]) \times \mathbf{p}_\alpha) \mathbf{q}_l \\ (\mathbf{p}_\alpha, \frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial q_2} \mathbf{p}_\alpha) &= 2q_0 (\mathbf{j}, \mathbf{p}_\alpha \times (V_0[\mathbf{r}'_\alpha] - V_0[\mathbf{r}_\alpha]) \mathbf{p}_\alpha) \\ &\quad + 2(\mathbf{j}, \mathbf{p}_\alpha \times (V_0[\mathbf{r}'_\alpha] + V_0[\mathbf{r}_\alpha]) \times \mathbf{p}_\alpha) \mathbf{q}_l \\ (\mathbf{p}_\alpha, \frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial q_3} \mathbf{p}_\alpha) &= 2q_0 (\mathbf{k}, \mathbf{p}_\alpha \times (V_0[\mathbf{r}'_\alpha] - V_0[\mathbf{r}_\alpha]) \mathbf{p}_\alpha) \\ &\quad + 2(\mathbf{k}, \mathbf{p}_\alpha \times (V_0[\mathbf{r}'_\alpha] + V_0[\mathbf{r}_\alpha]) \times \mathbf{p}_\alpha) \mathbf{q}_l \end{aligned} \quad (27)$$

以上より式 (24) の  $(1/2)(\mathbf{q}, \partial \mathbf{M} / \partial q_\kappa \mathbf{q})$  は次のようになる .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathbf{q}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_0} \mathbf{q}) &= -q_0 a - (\mathbf{q}_l, \mathbf{b}), & \frac{1}{2}(\mathbf{q}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_1} \mathbf{q}) &= -q_0 (\mathbf{i}, \mathbf{b}) - (\mathbf{i}, \mathbf{C} \mathbf{q}_l) \\ \frac{1}{2}(\mathbf{q}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_2} \mathbf{q}) &= -q_0 (\mathbf{j}, \mathbf{b}) - (\mathbf{j}, \mathbf{C} \mathbf{q}_l), & \frac{1}{2}(\mathbf{q}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_3} \mathbf{q}) &= -q_0 (\mathbf{k}, \mathbf{b}) - (\mathbf{k}, \mathbf{C} \mathbf{q}_l) \end{aligned} \quad (28)$$

ただし , スカラ  $a$ , ベクトル  $\mathbf{b}$ , 行列  $\mathbf{C}$  を次のように定義した .

$$\begin{aligned} a &= \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{p}_\alpha, (V_0[\mathbf{r}'_\alpha] + V_0[\mathbf{r}_\alpha]) \mathbf{p}_\alpha), & \mathbf{b} &= \mathbf{p}_\alpha \times (V_0[\mathbf{r}'_\alpha] - V_0[\mathbf{r}_\alpha]) \mathbf{p}_\alpha, \\ \mathbf{C} &= \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{p}_\alpha \times (V_0[\mathbf{r}'_\alpha] + V_0[\mathbf{r}_\alpha]) \times \mathbf{p}_\alpha \end{aligned} \quad (29)$$

以上より ,  $(1/2)(\mathbf{q}, \partial \mathbf{M} / \partial q_\kappa \mathbf{q})$ ,  $\kappa = 0, 1, 2, 3$  を成分とするベクトルは次のように書ける .

$$-\begin{pmatrix} q_0 a + (\mathbf{q}_l, \mathbf{b}) \\ q_0 (\mathbf{i}, \mathbf{b}) + (\mathbf{i}, \mathbf{C} \mathbf{q}_l) \\ q_0 (\mathbf{j}, \mathbf{b}) + (\mathbf{j}, \mathbf{C} \mathbf{q}_l) \\ q_0 (\mathbf{k}, \mathbf{b}) + (\mathbf{k}, \mathbf{C} \mathbf{q}_l) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} q_0 a + (\mathbf{q}_l, \mathbf{b}) \\ q_0 \mathbf{b} + \mathbf{C} \mathbf{q}_l \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{b} & \mathbf{C} \end{pmatrix} \mathbf{q} = -\mathbf{L} \mathbf{q} \quad (30)$$

ただし ,  $\mathbf{L}$  は次の  $4 \times 4$  行列である .

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha=1}^N \begin{pmatrix} (\mathbf{p}_\alpha, (V_0[\mathbf{r}'_\alpha] + V_0[\mathbf{r}_\alpha]) \mathbf{p}_\alpha) & (\mathbf{p}_\alpha \times (V_0[\mathbf{r}'_\alpha] - V_0[\mathbf{r}_\alpha]) \mathbf{p}_\alpha)^\top \\ \mathbf{p}_\alpha \times (V_0[\mathbf{r}'_\alpha] - V_0[\mathbf{r}_\alpha]) \mathbf{p}_\alpha & \mathbf{p}_\alpha \times (V_0[\mathbf{r}'_\alpha] + V_0[\mathbf{r}_\alpha]) \times \mathbf{p}_\alpha \end{pmatrix} \quad (31)$$

これを用いると , 式 (20) はベクトルとして次のように書ける .

$$\nabla_{\mathbf{q}} J = \mathbf{M} \mathbf{q} - \mathbf{L} \mathbf{q} \quad (32)$$

## 5. FNS 法

式 (32) を 0 とする  $\mathbf{q}$  を計算するのに Chojnacki ら<sup>2)</sup> の FNS 法を用いると , 次の手順となる .

- (1) 回転前の位置  $\mathbf{r}_\alpha$  と回転後の位置  $\mathbf{r}'_\alpha$  から式 (16) の行列  $\mathbf{X}_\alpha$  を計算する .
- (2) 初期値  $\mathbf{q} = (q_0, \mathbf{q}_l)^\top$  を与える .
- (3) 式 (14) の行列  $\mathbf{V}_\alpha$  を計算する .
- (4)  $\mathbf{W}_\alpha = \mathbf{V}_\alpha^{-1}$  とし , 式 (19) の行列  $\mathbf{M}$  を計算する .
- (5) 式 (25) のベクトル  $\mathbf{p}_\alpha$  を計算する .

- (6) 式 (31) の行列  $L$  を計算する .  
(7) 固有値問題

$$(M - L)q' = \lambda q' \quad (33)$$

の最小固有値  $\lambda$  に対する単位固有ベクトル  $q'$  を計算する .

- (8)  $q' \approx \pm q$  なら  $q'$  を返して終了する . そうでなければ  $q \leftarrow q'$  と更新してステップ (3) に戻る .

この FNS 法を開始するには  $q$  の初期値が必要である . 最も簡単なのは Ohta ら<sup>22)</sup> のように

$$M_0 = \sum_{\alpha=1}^N X_{\alpha}^{\top} X_{\alpha} \quad (34)$$

の最小固有値に対する単位固有ベクトル  $q$  を用いることである .

## 6. 共分散行列の評価

前節の計算を行うには回転前後の位置  $r_{\alpha}$ ,  $r'_{\alpha}$  の誤差分布を指定する正規化共分散行列  $V_0[r_{\alpha}]$ ,  $V_0[r'_{\alpha}]$  を評価する必要がある . これはどういうセンサーで  $r_{\alpha}$ ,  $r'_{\alpha}$  を計測したかに依存する . ここではステレオ視による場合を考える . 固定した  $XYZ$  世界座標を考え , カメラのレンズ中心を原点  $O$  に置き , 光軸を  $Z$  軸に一致させ , 画像座標の  $x, y$  軸が  $X, Y$  軸に平行になるように置いたものを「基準位置」とする . カメラを基準位置から  $R$  (回転行列) だけ回転し ,  $t$  だけ並進させ , 焦点距離  $f$  で撮影すると , 空間の点  $r$  が投影される点  $(x, y)$  は次の関係を満たす<sup>5)</sup> .

$$x \simeq PX, \quad x \equiv \begin{pmatrix} x/f_0 \\ y/f_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X \equiv \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} \quad (35)$$

ただし  $\simeq$  は零でない定数倍を除いて等しいことを表す .  $f_0$  は計算の不安定を防ぐスケール定数 (単位は画素) であり , ほぼ画像サイズにとる .  $P$  は次の  $3 \times 4$  投影行列である .

$$P = \begin{pmatrix} f/f_0 & 0 & 0 \\ 0 & f/f_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^{\top} & -R^{\top}t \end{pmatrix} \quad (36)$$

ただし , 事前のカメラ校正により光軸点が原点となる画像座標系をとっている . そしてアスペクト比は 1 で , 画像歪はない (補正している) とする .

2 台のカメラを用いるステレオ視を考え , 第 1 , 第 2 カメラをそれぞれ基準位置から  $R, R'$  だけ回転し ,  $t, t'$  だけ並進させ , 焦点距離  $f, f'$  で撮影するとする . それぞれのカメラの投影行列を  $P, P'$  とする . 2 画像間の対応点をベクトルで表したものを  $x, x'$  とすると , 対応点抽出に誤差があるとこれらはエピ極線方程式を満たさない . そこでこれらがエピ極線方程式を厳密に満たす位置  $\hat{x}, \hat{x}'$  に最適に補正する . これは幾何学的には各カメラの視点を始点として画像面上のそれぞれの点を通る視線が空間の 1 点で交わるように移動距離の二乗和を最小にするように移動させることに相当する<sup>18)</sup> . そして補正した  $\hat{x}, \hat{x}'$  から 3 次元位置  $\hat{r}$  が一意的に定まる . その計算手順は文献 18) 参照 .

画像上の点  $x, x'$  の各座標の誤差は期待値 0 , 標準偏差  $\sigma$  (画素) の独立な正規分布に従うものとする . しかし , これらをエピ極線方程式を満たすように最適に補正した  $\hat{x}, \hat{x}'$  の誤差はもやは各座標ごとに独立ではなく , さらに  $\hat{x}, \hat{x}'$  の誤差間に相関が生じる<sup>13),14)</sup> . その結果 ,  $\hat{x}, \hat{x}'$  の正規化共分散行列  $V_0[\hat{x}], V_0[\hat{x}']$  と正規化相関行列  $V_0[\hat{x}, \hat{x}'], V_0[\hat{x}', \hat{x}]$  が次のようになる<sup>14),19)</sup> ( $P_k \equiv \text{diag}(1, 1, 0)$  と定義する) .

$$\begin{aligned} V_0[\hat{x}] &= \frac{1}{f_0^2} \left( P_k - \frac{(P_k F \hat{x}') (P_k F \hat{x}')^{\top}}{\|P_k F \hat{x}'\|^2 + \|P_k F^{\top} \hat{x}\|^2} \right), \\ V_0[\hat{x}'] &= \frac{1}{f_0'^2} \left( P_k - \frac{(P_k F^{\top} \hat{x}) (P_k F^{\top} \hat{x})^{\top}}{\|P_k F \hat{x}'\|^2 + \|P_k F^{\top} \hat{x}\|^2} \right), \\ V_0[\hat{x}, \hat{x}'] &= \frac{1}{f_0^2} \left( -\frac{(P_k F \hat{x}') (P_k F^{\top} \hat{x})^{\top}}{\|P_k F \hat{x}'\|^2 + \|P_k F^{\top} \hat{x}\|^2} \right) \quad (= V_0[\hat{x}', \hat{x}]^{\top}) \end{aligned} \quad (37)$$

エピ極線方程式が成り立つように補正した  $\hat{x}, \hat{x}'$  から定まる 3 次元点を  $\hat{X}$  とすると  $\hat{x} \simeq P \hat{X}$ ,  $\hat{x}' \simeq P' \hat{X}$  が満たされる . ゆえにベクトル  $\hat{x}$  とベクトル  $P \hat{X}$  は平行であり , ベクトル  $\hat{x}'$  とベクトル  $P' \hat{X}$  も平行である . すなわち , 次式が成り立つ .

$$\hat{x} \times P \hat{X} = 0, \quad \hat{x}' \times P' \hat{X} = 0 \quad (38)$$

したがって ,  $\hat{x}, \hat{x}'$  に含まれる誤差を  $\Delta \hat{x}, \Delta \hat{x}'$  とし ,  $\hat{X}$  に含まれる誤差を  $\Delta \hat{X}$  とすると , 第 1 近似において次の関係が得られる .

$$\Delta \hat{x} \times P \hat{X} + \hat{x} \times P \Delta \hat{X} = 0, \quad \Delta \hat{x}' \times P' \hat{X}' + \hat{x}' \times P' \Delta \hat{X} = 0 \quad (39)$$

これらはまとめて次のように書ける .

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \times \tilde{P} \\ \hat{x}' \times \tilde{P}' \end{pmatrix} \Delta \hat{r} = \begin{pmatrix} (P \hat{X}) \times I & O \\ O & (P' \hat{X}') \times I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \hat{x} \\ \Delta \hat{x}' \end{pmatrix} \quad (40)$$

ただし、 $\tilde{P}$ ,  $\tilde{P}'$  はそれぞれ  $3 \times 4$  行列  $P$ ,  $P'$  の第 4 列を除いた  $3 \times 3$  行列である．左辺の行列の転置を両辺に掛けると次の関係式が得られる．

$$\begin{aligned} & \left( (\hat{x} \times \tilde{P})^\top (\hat{x} \times \tilde{P}) + (\hat{x}' \times \tilde{P}')^\top (\hat{x}' \times \tilde{P}') \right) \Delta \hat{r} \\ &= \begin{pmatrix} (\hat{x} \times \tilde{P})^\top ((P\hat{X}) \times I) & (\hat{x}' \times \tilde{P}')^\top ((P'\hat{X}) \times I) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \hat{x} \\ \Delta \hat{x}' \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (41)$$

ここで次の関係式に注意する<sup>14)</sup>．

$$\begin{aligned} (\hat{x} \times \tilde{P})^\top (\hat{x} \times \tilde{P}) &= \tilde{P}^\top (\hat{x} \times I)^\top (\hat{x} \times I) \tilde{P} = \|\hat{x}\|^2 \tilde{P}^\top P_{\mathcal{N}[\hat{x}]} \tilde{P} \\ (\hat{x}' \times \tilde{P}')^\top (\hat{x}' \times \tilde{P}') &= \tilde{P}'^\top (\hat{x}' \times I)^\top (\hat{x}' \times I) \tilde{P}' = \|\hat{x}'\|^2 \tilde{P}'^\top P_{\mathcal{N}[\hat{x}']} \tilde{P}' \end{aligned} \quad (42)$$

ただし、次のように定義した．

$$P_{\mathcal{N}[\hat{x}]} \equiv I - \mathcal{N}[\hat{x}]\mathcal{N}[\hat{x}]^\top, \quad P_{\mathcal{N}[\hat{x}']} \equiv I - \mathcal{N}[\hat{x}']\mathcal{N}[\hat{x}']^\top \quad (43)$$

同様に、次の関係が成り立つ．

$$\begin{aligned} (\hat{x} \times \tilde{P})^\top ((P\hat{X}) \times I) &= \tilde{P}^\top \left( (\hat{x}, P\hat{X})I - (P\hat{X})\hat{x}^\top \right) \\ (\hat{x}' \times \tilde{P}')^\top ((P'\hat{X}) \times I) &= \tilde{P}'^\top \left( (\hat{x}', P'\hat{X})I - (P'\hat{X})\hat{x}'^\top \right) \end{aligned} \quad (44)$$

これらを用いると、式 (41) は次のように書ける．

$$\begin{aligned} A \Delta \hat{r} &= B \begin{pmatrix} \Delta \hat{x} \\ \Delta \hat{x}' \end{pmatrix}, \quad A \equiv \|\hat{x}\|^2 \tilde{P}^\top P_{\mathcal{N}[\hat{x}]} \tilde{P} + \|\hat{x}'\|^2 \tilde{P}'^\top P_{\mathcal{N}[\hat{x}']} \tilde{P}', \\ B &\equiv \left( \tilde{P}^\top \left( (\hat{x}, P\hat{X})I - (P\hat{X})\hat{x}^\top \right) \quad \tilde{P}'^\top \left( (\hat{x}', P'\hat{X})I - (P'\hat{X})\hat{x}'^\top \right) \right) \end{aligned} \quad (45)$$

ゆえに次の関係が成り立つ．

$$\Delta \hat{r} \Delta \hat{r}^\top = A^{-1} B \begin{pmatrix} \Delta \hat{x} \Delta \hat{x}^\top & \Delta \hat{x} \Delta \hat{x}'^\top \\ \Delta \hat{x}' \Delta \hat{x}^\top & \Delta \hat{x}' \Delta \hat{x}'^\top \end{pmatrix} B^\top (A^{-1})^\top \quad (46)$$

両辺の期待値をとると、正規化共分散行列  $V_0[\hat{r}]$  が次のよう求まる．

$$V_0[\hat{r}] = A^{-1} B \begin{pmatrix} V_0[\hat{x}] & V_0[\hat{x}, \hat{x}'] \\ V_0[\hat{x}', \hat{x}] & V_0[\hat{x}'] \end{pmatrix} B^\top (A^{-1})^\top \quad (47)$$

## 7. 実 験

図 2 左のように曲面格子を原点を通るある回転軸の周りに 10 度回転する．そしてステレオ視によって各格子点の回転前後 3 次元位置を計測する．曲面格子はその中心の格子点が

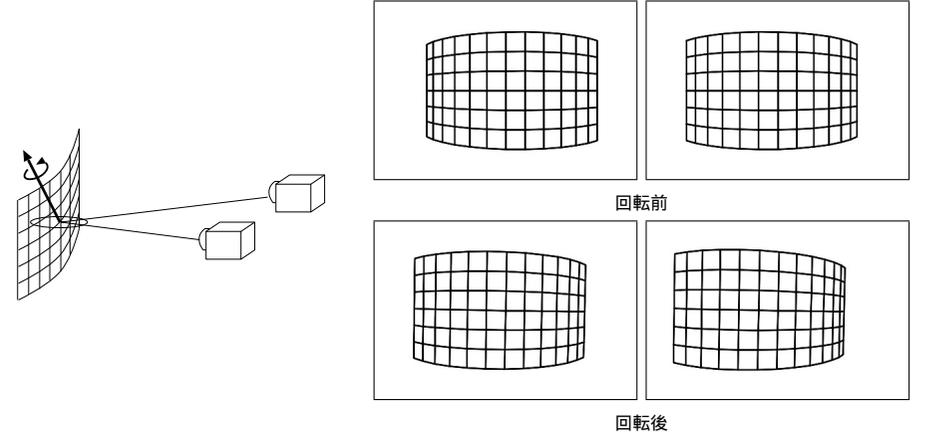


図 2 左：回転する曲面格子ステレオ視による 3 次元計測と誤差楕円体．右：曲面格子の回転前後のステレオ画像のシミュレーション．

世界座標の原点にあり、2 台のカメラはそれを 10 度で見込む位置に配置している．画像サイズは  $500 \times 800$  画素、焦点距離は 600 画素を想定している．各格子点を対応点とし、その  $x, y$  座標に期待値 0、標準偏差  $\sigma$  画素の正規乱数を加え、それぞれ文献 18) の方法で各格子点の 3 次元位置を最適に計算した．復元位置  $\hat{r}_\alpha, \hat{r}'_\alpha$  の正規化共分散行列  $V_0[\hat{r}_\alpha], V_0[\hat{r}'_\alpha]$  を前節の理論によって予測すると、誤差の分布範囲（誤差楕円体）は全点に対して平均して上下、左右、奥行き方向が 1.000 : 1.685 : 5.090、すなわち、奥行き方向の誤差が上下方向の約 5 倍となった．実際にいろいろの誤差を加えて実測するとこの比が 1.000 : 1.686 : 5.095 となり、理論的予測と非常に近い値になった．

次に、予測した正規化共分散行列  $V_0[\hat{r}_\alpha], V_0[\hat{r}'_\alpha]$  を用いて復元した回転前後の 3 次元位置  $\hat{r}_\alpha, \hat{r}'_\alpha$  からその回転を計算した．そして、その四元数を  $\hat{q}$  とし、その真値を  $\bar{q}$  に対する誤差を次のように評価した．

$$\Delta q = P_{\bar{q}} \hat{q}, \quad P_{\bar{q}} \equiv I - \bar{q} \bar{q}^\top \quad (48)$$

四元数は 4 次元単位ベクトルであるから、 $\hat{q}$  は 4 次元空間の 3 次元球面  $S^3$  上の  $\bar{q}$  の近傍に分布する．単位ベクトルは伸縮しないから、誤差として関心があるのは  $\bar{q}$  に直交する成分  $\Delta q$  である（図 3）． $P_{\bar{q}}$  は計算値  $\hat{q}$  を真値  $\bar{q}$  における  $S^3$  の接平面上への射影行列<sup>15)</sup> であ

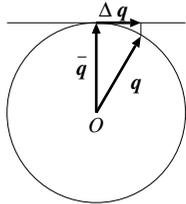


図3 計算した四元数ベクトル  $\hat{q}$  の真値  $\bar{q}$  に直交する成分  $\Delta q$  .

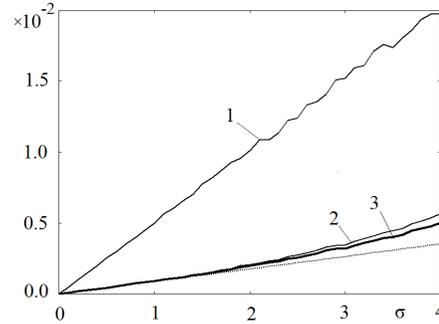


図4 ステレオ画像に加えた誤差の標準偏差  $\sigma$  に対する回転の計算の RMS 誤差 . 点線は KCR 下界 . 1. 一様等方誤差を仮定する最適解法, 2. くりこみ法, 3. 提案手法 .

る . そして ,  $\sigma$  を固定して異なる誤差に対して 1000 回試行し , RMS 誤差を次のように評価した .

$$E = \sqrt{\frac{1}{1000} \sum_{a=1}^{1000} \|\Delta q^{(a)}\|^2} \quad (49)$$

$\Delta q^{(a)}$  は  $a$  回目の試行の値である . 精度の理論限界を示す「KCR 下界」<sup>14),17)</sup> は次のようになる .

$$E_{\text{KCR}} = \sigma \text{tr} \left( \sum_{\alpha=1}^N \bar{X}_{\alpha}^{\top} \bar{W}_{\alpha} \bar{X}_{\alpha} \right)^{-} \quad (50)$$

ただし ,  $\bar{X}_{\alpha}$  ,  $\bar{W}_{\alpha}$  はそれぞれ  $X_{\alpha}$  ,  $W_{\alpha}$  の定義式において  $q$  ,  $r_{\alpha}$  ,  $r'_{\alpha}$  をそれらの真値  $\bar{q}$  ,  $\bar{r}_{\alpha}$  ,  $\bar{r}'_{\alpha}$  に置き換えた値であり ,  $(\cdot)^{-}$  は一般逆行列を表す .  $\text{tr}$  は行列のトレースである .

図4は横軸を  $\sigma$  にとって RMS 誤差  $E$  をプロットしたものである . 点線が KCR 下界である . プロット 1 が一様等方誤差を仮定する最適解法 (付録 A.1) , プロット 2 が Ohta ら<sup>22)</sup> のくりこみ法 (付録 A.2) , プロット 3 が提案手法である . これから , 3 次元データに関しては一様等方誤差を仮定する最適解法は精度が低いことが分かる . それに比較すると Ohta ら<sup>22)</sup> のくりこみ法は KCR 下界に近い精度があり , ほぼ最適解を計算していることが確認される . そして , 提案手法ではわずかではあるが Ohta ら<sup>22)</sup> のくりこみ法よりもさらに精度の高い解が得られることが分かる .

## 8. まとめ

本論文では二組の 3 次元データ間の 3 次元回転を最適に計算する新しい方法を示した . 画像上の点データと異なり , 3 次元データはカメラやレンジファインダーなどの何らのセンサーを用いて計測されるので , センサーのタイプ , 位置 , 向きに依存して各 3 次元点の誤差分布は必然的に大きな不均一性と異方性をもつ . 本論文では Ohta ら<sup>22)</sup> による 3 次元回転の四元数表現に基づき , Chojnacki ら<sup>2)</sup> の FNS 法を用いて厳密な最尤推定解を得る手順を導いた . 例としてステレオ視によって復元した 3 次元データを考え , ステレオ復元の誤差特性を解析して 3 次元回転を計算した . その結果 , 広く用いられている一様等方誤差を仮定する最適解法は精度が低いことを示した . そして Ohta ら<sup>22)</sup> のくりこみ法は精度が高く , ほぼ最適解を計算していることを確認するとともに , 提案手法ではわずかではあるがさらに精度の高い解が得られることを示した .

謝辞: 本研究に関する有益なご意見を頂いたトルコ , イスタンブール工科大学 Orhan Akyilmaz 准教授および群馬大学の太田直哉教授に感謝します . 本研究の一部は文部科学省科学研究費基盤研究 (C 21500172) の助成による .

## 参考文献

- 1) K. S. Arun, T. S. Huang and S. D. Blostein, Least squares fitting of two 3-D point sets, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **9**-5 (1987-5), 698-700.
- 2) W. Chojnacki, M. J. Brooks, A. van den Hengel and D. Gawley, On the fitting of surfaces to data with covariances, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **22**-11 (2000), 1294-1303.
- 3) L. Dorst, First order error propagation of the Procrustes method for 3D attitude estimation, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **27**-2 (2005-2), 221-229.
- 4) Y. A. Felus and R. C. Burch, On symmetrical three-dimensional datum conversion, *GPS Solutions* **13**-1 (2009-1), 65-74.
- 5) R. Hartley and A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2004.
- 6) B. K. P. Horn, Closed-form solution of absolute orientation, using quaternions, *Int. J. Opt. Soc. Am.* **A-4**-4 (1987-4), 629-642.
- 7) B. K. P. Horn, H. M. Hildren and S. Negahdaripour, Closed-form solution of absolute orientation, using orthonormal matrices, *Int. J. Opt. Soc. Am.* **A-5**-7 (1988-7), 1127-1135.
- 8) D. Goryn and S. Hein, On the estimation of rigid body rotation from noisy data, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **17**-12 (1995-12), 1219-1200.
- 9) K. Kanatani, *Group-Theoretical Methods in Image Understanding*, Springer, Berlin, Germany, 1990.
- 10) 金谷健一, 「画像理解—3次元認識の数理」, 森北出版, 1990.

- 11) K. Kanatani, *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.
- 12) K. Kanatani, Analysis of 3-D rotation fitting, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **16**-5 (1994-5), 543-449.
- 13) 金谷健一, 「空間データの数理—3次元コンピューティングに向けて」, 朝倉書店, 1995.
- 14) K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier, Amsterdam, the Netherlands, 1996; reprinted Dover, New York, NY, U.S.A., 2005.
- 15) 金谷健一, 「形状CADと図形の数学」共立出版, 1998.
- 16) 金谷健一, 「これなら分かる最適化数学—基礎原理から計算手法まで—」, 共立出版, 2005.
- 17) K. Kanatani, Statistical optimization for geometric fitting: Theoretical accuracy analysis and high order error analysis, *Int. J. Comput. Vision*, **80**-2 (2008-11), 167-188.
- 18) 金谷健一, 菅谷保之, 新妻弘崇, 2画像からの三角測量: Hartley-Sturm vs. 最適補正, 情報処理学会研究報告, 2008-CVIM-162-54 (2008-3), 335-342.
- 19) Y. Kanazawa and K. Kanatani, Reliability of 3-D reconstruction by stereo vision, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, **E78-D**-10 (1995-10), 1301-1306.
- 20) Leedan, Y. and Meer, P.: Heteroscedastic regression in computer vision: Problems with bilinear constraint, *Int. J. Comput. Vision.*, **37**-2 (2000-6), pp. 127-150.
- 21) J. Matei and P. Meer, Estimation of nonlinear errors-in-variables models for computer vision applications, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **28**-10 (2006-10), 1537-1552.
- 22) N. Ohta and K. Kanatani, Optimal estimation of three-dimensional rotation and reliability evaluation, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, *E81-D*-11 (1998-11), 1247-1252.
- 23) S. Umeyama, Least-squares estimation of transformation parameters between two point sets, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **13**-4 (1991-4), 379-380.

## 付 録

### A.1 一様等方誤差を仮定する最適解法

数学的に等価ないろいろな方法が知られているが<sup>(1),(6),(7),(12),(23)</sup>, 次の特異値分解による方法が最も簡明である.

- (1) 回転前の位置  $r_\alpha$  と回転後の位置  $r'_\alpha$  から次の相関行列を計算する.

$$N = \sum_{\alpha=1}^N r'_\alpha r_\alpha^\top \quad (51)$$

- (2) 相関行列  $N$  を次のように特異値分解する.

$$N = U \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) V^\top \quad (52)$$

$U, V$  は直交行列であり,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 (\geq 0)$  は特異値である.

- (3) 回転  $R$  を次のように計算する.

$$R = U \text{diag}(1, 1, \det(UV^\top)) V^\top \quad (53)$$

### A.2 くりこみ法

Ohta ら<sup>22)</sup> のくりこみ法の手順は次のようになる.

- (1) 回転前に位置  $r_\alpha$  と回転後の位置  $r'_\alpha$  から式 (16) の行列  $X_\alpha$  を計算する.
- (2) 定数  $c$  と  $3 \times 3$  行列  $W_\alpha$  を  $c = 0, W_\alpha = I$  と置く.
- (3) 式 (19) の行列  $M$  を計算する.
- (4) スカラ  $n$ , ベクトル  $\mathbf{n}$ ,  $3 \times 3$  行列  $N'$  を次のように計算する.

$$n = \sum_{\alpha=1}^N (W_\alpha; V_0[r'_\alpha] + V_0[r_\alpha]), \quad \mathbf{n} = 2 \sum_{\alpha=1}^N \text{vec}[A[W_\alpha(V_0[r'_\alpha] - V_0[r_\alpha])]]$$

$$N' = \sum_{\alpha=1}^N [W_\alpha \times (V_0[r'_\alpha] + V_0[r_\alpha])] \quad (54)$$

ただし, 行列  $A = (A_{ij}), B = (B_{ij})$  の内積を  $(A; B) = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} B_{ij}$  と定義する. 記号  $A[\cdot]$  は反対称化作用素である ( $A[A] = (A - A^\top)/2$ ). 反対称行列  $A = (A_{ij})$  ( $A^\top = -A$  となる行列) に対して  $\text{vec}[\cdot]$  はベクトル化作用素であり,  $\text{vec}[\cdot] = (A_{32}, A_{13}, A_{21})^\top$  と定義する. そして, 行列  $A = (A_{ij}), B = (B_{ij})$  の外積  $[A \times B]$  を  $(ij)$  要素が  $\sum_{k,l,m,n=1}^3 \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} A_{km} B_{ln}$  の行列と定義する. ただし  $\varepsilon_{ijk}$  は置換符号であり,  $(ijk)$  が (123) の偶順列のとき 1, 奇順列のとき -1, その他 (重複があるとき) 0 であると定義する.

- (5) 次の  $4 \times 4$  行列  $N$  を計算する.

$$N = \begin{pmatrix} n & \mathbf{n}^\top \\ \mathbf{n} & N' \end{pmatrix} \quad (55)$$

- (6) 固有値問題

$$(M - cN)q = \lambda q \quad (56)$$

を解き, 最小固有値  $\lambda$  に対する単位固有ベクトル  $q$  を計算する.

- (7)  $|\lambda| \approx 0$  なら  $q$  を返して終了する. そうでなければ  $c$  と  $W_\alpha$  を次のように更新してステップ (3) に戻る.

$$c \leftarrow c + \frac{\lambda}{(q, Nq)}$$

$$W_\alpha \leftarrow \left( q_0^2 (V_0[r'_\alpha] + V_0[r_\alpha]) - 2q_0 S[q_l \times (V_0[r'_\alpha] - V_0[r_\alpha])] + q_l \times (V_0[r'_\alpha] + V_0[r_\alpha]) \times q_l \right)^{-1} \quad (57)$$