

自己校正法の最新レシピ

金谷 健一 森 昭延 菅谷 保之

岡山大学大学院自然科学研究科

未校正カメラで撮影した複数の画像間の特徴点の対応から線形計算の組合せで3次元形状を代数的に計算する自己校正法がいろいろ研究されてきたが、本稿ではそれらの中で決定版と思われる最新の方法を選んでその計算手順を詳細に述べる。これは射影変換の不定性のある3次元形状を計算する「射影復元」と、それを正しい形状に変換する「ユークリッド化」の2段階から成る。前者には「因子分解法」を用い、後者には「絶対2級面束拘束条件」を適用する。そして、精度や計算の安定性を向上させる新しい工夫を加える。

Latest Recipes for Self-calibration

Kenichi Kanatani*, Akinobu Mori*, and Yasuyuki Sugaya*

*Department of Computer Science, Okayama University, Okayama 700-8530 Japan

Various techniques have been studied in the past for algebraic camera self-calibration for reconstructing 3-D shapes from feature point correspondences over multiple images taken by uncalibrated cameras, using only linear computations. In this paper, we choose from among them the latest one that we regard as definitive and describe its computational procedure in detail. It consists of two stages: “projective reconstruction” for computing a 3-D shape up to projectivity and “Euclidean rectification” that transforms it to a correct shape. For the former, we adopt the “factorization” approach; for the latter, we impose the “dual absolute quadric constraint”. We also introduce new techniques for improving accuracy and computational stability.

1. まえがき

未校正カメラで撮影した複数の画像間の特徴点の対応から3次元形状を代数的に計算する自己校正法は過去10年間に著しい進歩を遂げた[5, 28]。

“代数的”というのはデータに誤差がないときに厳密解が得られるという意味であり、データの誤差を考慮した最適解を得るものではない。しかし、すべてが解析的公式と線形計算のみで実行でき、非線形探索を必要としない。未知数より多くの式が成立すれば単に最小二乗法（固有値問題に帰着する）を適用する。

このような手法はこれまでにさまざまなものが提案され、現在一段落したと思われるので、本稿では考え方において決定版と思われる最新の方法を選び、そのアルゴリズムをまとめる。

特に、これまでは高度な複素射影幾何学に基づいて定式化され、難解な印象を与えていたが、本稿では計算の実体において複素射影幾何学はまったく必要とせず、本稿に示す単純な線形計算の組み合わせ

を行えば誰でも簡単に実行できることを示す。

計算は次の2段階からなる。

1. 射影復元：カメラに関する何らの知識なしに3次元復元を行う。得られる形状は真の形状に何らかの射影変換を施したものとなる。
2. ユークリッド化：カメラに関する最小限の知識を用いて射影復元を正しい形状（ユークリッド復元¹）に変換する。

射影復元には、全フレームを同等に扱い、線形計算を反復する因子分解法を採用する。歴史的にはまずChristyらがアフィンカメラに対するTomasi-Kanadeの因子分解法[9, 18, 23]を反復して透視効果を導入する方法を考えた[2, 16]。Sturmらはエピ極線束条件に基く直接的な方法を提案した[3, 22, 24, 29]。これにはあらかじめフレーム間の基礎行列を計算する必要があったが、その後、基礎行列を用いずに直接的な反復による方法が開発された[6, 14, 15, 26, 27]。

その結果、当初の“特異値分解による行列の因子

*700-8530 岡山市津島中 3-1-1, (086)251-8173
{kanatani,mori,sugaya}@suri.it.okayama-u.ac.jp

¹画像のみからは絶対的なスケールが不定であり、厳密には「相似復元」と呼ぶべきであるが、「ユークリッド復元」という用語が定着している。

分解”という代数的な意味が薄れ，“高次元のデータに部分空間を当てはめる”という幾何学的な解釈が本質となった²。本稿では Mahamud ら [14] の方法を採用する。

ユークリッド化には，カメラに関して最小の仮定を置き，Triggs の絶対 2 級面束（双対絶対 2 次曲面）拘束条件 [25] を適用する．これにも種々のバリエーションがあるが [7, 8, 19, 20, 21]，本稿ではカメラの歪み角 0，アスペクト比 1 を仮定し，Seo ら [20] の方法を採用する．そして，精度や計算の安定性を向上させる新しい工夫を加える．

2. 射影復元

2.1 同次座標と投影行列

M フレーム上で N 個の特徴点を追跡したとする．第 κ フレームでの第 α 特徴点の位置を $(x_{\kappa\alpha}, y_{\kappa\alpha})$ とし，これを次の 3 次元ベクトルで表す (f_0 は任意の定数³)．

$$\mathbf{x}_{\kappa\alpha} = \begin{pmatrix} x_{\kappa\alpha}/f_0 \\ y_{\kappa\alpha}/f_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

第 α 特徴点の 3 次元位置を $(X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha)$ とすると，その第 κ フレームへの投影は次のように表せる．

$$\mathbf{x}_{\kappa\alpha} = Z[\mathbf{\Pi}_\kappa \begin{pmatrix} X_\alpha \\ Y_\alpha \\ Z_\alpha \\ 1 \end{pmatrix}] \quad (2)$$

ここに $Z[\cdot]$ は第 3 成分を 1 にする正規化を表す． $\mathbf{\Pi}_\kappa$ は第 κ フレームにおけるカメラの位置や向きや内部パラメータ（焦点距離など）から定まる 3×4 行列であり，投影行列（またはカメラ行列）と呼ばれる [5, 28]．しかし，正規化 $Z[\cdot]$ があると解析が困難となるので，式 (2) を次のように書く．

$$z_{\kappa\alpha} \mathbf{x}_{\kappa\alpha} = \mathbf{\Pi}_\kappa \mathbf{X}_\alpha \quad (3)$$

ここに $z_{\kappa\alpha}$ は正規化定数であり，射影的奥行きと呼ばれる．これを導入すると， \mathbf{X}_α の第 4 成分が 1 であるという条件は考慮する必要がない． \mathbf{X}_α を定数倍することは射影的奥行き $z_{\kappa\alpha}$ を定数倍することと同じ

²Tomasi-Kanade の因子分解法 [9, 18, 23] も同様であり，「因子分解法」という名称は誤解を招きやすい．幾何学的な解釈は [1, 12, 13] 参照．

³数値計算の安定化のためのスケールの調節であるが， $f_0 = 1$ としても実際的な問題はないであろう．

だからである．そこで，定数倍しても成分間の比が同じであれば同じ点を表すとみなす同次座標 $X_\alpha^1 : X_\alpha^2 : X_\alpha^3 : X_\alpha^4$ を導入し [11]， \mathbf{X}_α はこれを成分とするベクトルであるとする．実際の 3 次元位置 $(X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha)$ 次のように計算される．

$$X_\alpha = \frac{X_\alpha^1}{X_\alpha^4}, \quad Y_\alpha = \frac{X_\alpha^2}{X_\alpha^4}, \quad Z_\alpha = \frac{X_\alpha^3}{X_\alpha^4} \quad (4)$$

射影復元とはカメラの位置や向きや内部パラメータを一切無視し，式 (3) を満たす何らかの $\mathbf{\Pi}_\kappa$ ， \mathbf{X}_α を求めることである．もちろん解は一意的ではない．なぜなら，任意の 4×4 正則行列 \mathbf{H} を用いて

$$\tilde{\mathbf{\Pi}}_\kappa = \mathbf{\Pi}_\kappa \mathbf{H}^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{X}}_\alpha = \mathbf{H} \mathbf{X}_\alpha \quad (5)$$

としても $\tilde{\mathbf{\Pi}}_\kappa$ ， $\tilde{\mathbf{X}}_\alpha$ が式 (3) を満たすからである．式 (5) の第 2 式は射影変換を表す [11]．これは，解に射影変換 \mathbf{H} の不定性があることを意味する．その任意の一つの解を求めることが射影復元である．

2.2 4 次元部分空間の当てはめ

$z_{1\alpha} \mathbf{x}_{1\alpha}, z_{2\alpha} \mathbf{x}_{2\alpha}, \dots, z_{M\alpha} \mathbf{x}_{M\alpha}$ を縦に並べてできる $3M$ 次元ベクトルを \mathbf{p}_α とし， $\mathbf{\Pi}_1, \mathbf{\Pi}_2, \dots, \mathbf{\Pi}_M$ のそれぞれの第 i 列を縦に並べてできる $3M$ 次元ベクトルを π_i とすると，式 (3) は次のように書ける．

$$\mathbf{p}_\alpha = X_\alpha^1 \pi_1 + X_\alpha^2 \pi_2 + X_\alpha^3 \pi_3 + X_\alpha^4 \pi_4 \quad (6)$$

これは N 本のベクトル $\{\mathbf{p}_\alpha\}$ すべてが $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ の張る 4 次元部分空間 \mathcal{L} に含まれることを意味する．そこで射影的奥行き $z_{\kappa\alpha}$ に何らかの近似値を仮定し⁴， $\{\mathbf{p}_\alpha\}$ の張る 4 次元部分空間 \mathcal{L} を計算する．その基底は $3M \times 3M$ 行列

$$\mathbf{M} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{p}_\alpha \mathbf{p}_\alpha^\top \quad (7)$$

の大きい 4 個の固有値に対する単位固有ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ によって与えられる．ただし，式 (3) より射影的奥行き $z_{\kappa\alpha}$ と同次座標 \mathbf{X}_α に任意の非零の定数 c_α を掛けてもよい．その結果， \mathbf{p}_α が c_α 倍される．この不定性を除くために \mathbf{p}_α を単位ベクトルに正規化する．

仮定した射影的奥行き $z_{\kappa\alpha}$ が正しくなければ各 \mathbf{p}_α が当てはめた部分空間 \mathcal{L} に含まれるとは限らない．そこで各 \mathbf{p}_α が \mathcal{L} に近づくように $z_{\kappa\alpha}$ を調節する．

⁴ $z_{\kappa\alpha} = 1$ とすればよい．これはアフィンカメラモデルを仮定することに相当する．

$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ は部分空間 \mathcal{L} の正規直交系であるから、ベクトル \mathbf{p}_α を \mathcal{L} へ直交射影すると

$$\hat{\mathbf{p}}_\alpha = \sum_{i=1}^4 (\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{u}_i) \mathbf{u}_i \quad (8)$$

となる⁵。ゆえに \mathbf{p}_α から \mathcal{L} に下ろした垂線の長さは次のようになる ($\|\mathbf{p}_\alpha\|^2 = 1$ と正規化していることに注意)。

$$\sqrt{\|\mathbf{p}_\alpha\|^2 - \|\hat{\mathbf{p}}_\alpha\|^2} = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^4 (\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{u}_i)^2} \quad (9)$$

したがって、 \mathbf{p}_α を \mathcal{L} に近づけるには次の J_α を最大にすればよい。

$$\begin{aligned} J_\alpha &= \sum_{i=1}^4 (\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{u}_i)^2 = \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{\kappa=1}^M (z_{\kappa\alpha} \mathbf{x}_{\kappa\alpha}, \mathbf{u}_{i\kappa}) \right)^2 \\ &= \sum_{\kappa, \lambda=1}^M \left(\sum_{i=1}^4 (\mathbf{x}_{\kappa\alpha}, \mathbf{u}_{i\kappa})(\mathbf{x}_{\lambda\alpha}, \mathbf{u}_{i\lambda}) \right) z_{\kappa\alpha} z_{\lambda\alpha} \quad (10) \end{aligned}$$

ただし、 $\mathbf{u}_{i\kappa}$ は $3M$ 次元ベクトル \mathbf{u}_i の第 $3(\kappa-1)+1, 3(\kappa-1)+2, 3(\kappa-1)+3$ 成分を第 1, 2, 3 成分とする 3 次元ベクトルである。

式 (10) を正規化条件

$$\|\mathbf{p}_\alpha\|^2 = \sum_{\kappa=1}^M z_{\kappa\alpha}^2 \|\mathbf{x}_{\kappa\alpha}\|^2 = 1 \quad (11)$$

のもとで最大化するために、新しい変数 $\xi_{\kappa\alpha}$ を

$$\xi_{\kappa\alpha} = \|\mathbf{x}_{\kappa\alpha}\| z_{\kappa\alpha} \quad (12)$$

と定義し、 $\xi_{1\alpha}, \xi_{2\alpha}, \dots, \xi_{M\alpha}$ を成分とする M 次元ベクトルを ξ_α とする。正規化条件 (11) は単に $\|\xi_\alpha\| = 1$ と書ける。式 (10) は次のように書ける。

$$J_\alpha = \sum_{\kappa, \lambda=1}^M A_{\kappa\lambda}^\alpha \xi_{\kappa\alpha} \xi_{\lambda\alpha} = (\xi_\alpha, \mathbf{A}^\alpha \xi_\alpha) \quad (13)$$

ただし、 $M \times M$ 行列 $\mathbf{A}^\alpha = (A_{\kappa\lambda})$ を次のように定義した。

$$A_{\kappa\lambda}^\alpha = \frac{\sum_{i=1}^4 (\mathbf{x}_{\kappa\alpha}, \mathbf{u}_{i\kappa})(\mathbf{x}_{\lambda\alpha}, \mathbf{u}_{i\lambda})}{\|\mathbf{x}_{\kappa\alpha}\| \cdot \|\mathbf{x}_{\lambda\alpha}\|} \quad (14)$$

式 (13) はベクトル ξ_α の 2 次形式であり、これを式 (11) のもとで最大にするには行列 \mathbf{A}^α の最大固有値に対する単位固有ベクトル ξ_α を求めればよい。ただ

⁵本論文ではベクトル a, b の内積を (a, b) と記す。

し、固有ベクトルには符号の不定性があるので、符号を次のように選ぶ。

$$\sum_{\kappa=1}^M \xi_{\kappa\alpha} \geq 0 \quad (15)$$

射影的奥行き $z_{\kappa\alpha}$ は式 (12) から求まる。

2.3 射影復元の手順

以上より、射影復元の次の手順が得られる。

入力: $\mathbf{x}_{\kappa\alpha}, \kappa = 1, \dots, M, \alpha = 1, \dots, N$.

出力: $\Pi_\kappa, \kappa = 1, \dots, M, \mathbf{X}_\alpha, \alpha = 1, \dots, N$.

計算:

1. 射影的奥行きを $z_{\kappa\alpha} = 1$ と初期化する。
2. ベクトル \mathbf{p}_α を計算する。
3. \mathbf{p}_α を単位ベクトルに正規化し、式 (7) の行列 M を計算する
4. 行列 M の大きい 4 個の固有値に対する単位固有ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ を計算する。
5. 次の計算を $\alpha = 1, \dots, N$ に渡って計算する。
 - (a) 式 (14) によって計算した行列 A^α の最大固有値に対する単位ベクトル ξ_α を求め、符号を式 (15) のように選ぶ。
 - (b) 得られた ξ_α から式 (12) により射影的奥行き $z_{\kappa\alpha}$ を計算する。
 - (c) 得られた $z_{\kappa\alpha}$ を用いてベクトル \mathbf{p}_α を再計算する。
6. ステップ 3 に戻り、これを収束するまで反復する。
7. 収束したら、 \mathbf{X}_α を次のように計算する。

$$\mathbf{X}_\alpha^i = (\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{u}_i) \quad (16)$$

8. 投影行列 Π_κ を次のように計算する。

$$\Pi_\kappa = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{1\kappa} & \mathbf{u}_{2\kappa} & \mathbf{u}_{3\kappa} & \mathbf{u}_{4\kappa} \end{pmatrix} \quad (17)$$

上記の反復は一種の EM アルゴリズムであり、収束が保証されるが、EM アルゴリズムの特徴として収束が非常に遅い。しかし、これを十分に収束させなければ次のステップのユークリッド化が精度よく計算できない。実際に計算では有限長演算の誤差によってついには振動状態に陥るので、式 (13) の全特徴点に渡る和 $\sum_{\alpha=1}^N J_\alpha$ がわずかでも減少するまで反復を継続した。

3. 射影復元のユークリッド化

3.1 内部パラメータ行列

第 κ フレームの光軸点を $(u_{\kappa 0}, v_{\kappa 0})$ とし、焦点距離を f_κ とすると、第 κ フレームカメラの内部パラ

メータ行列は次のように書ける [4, 28] .

$$K_\kappa = \begin{pmatrix} f_\kappa & 0 & u_{\kappa 0} \\ 0 & f_\kappa & v_{\kappa 0} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

ただし, 歪み角 0, アスペクト比 1 と仮定している. また, 焦点距離 f は式 (1) に用いた定数 f_0 を単位とする尺度で測るものとする. このとき, 式 (2) 中に現れる投影行列 Π_κ の真の値は次のように表せる.

$$\bar{\Pi}_\kappa = K_\kappa \begin{pmatrix} R_\kappa & t_\kappa \end{pmatrix} \quad (19)$$

ただし, R_κ は第 κ フレームにおいてカメラ座標系に相対的なワールド座標系の回転を表し, t_κ はワールド座標系の原点をカメラ座標系から見た位置である⁶. 上式から $R_\kappa R_\kappa^\top = I$ (単位行列) に注意すると, 次の関係を得る ($\text{diag}(a, b, \dots)$ は a, b, \dots を対角要素とする対角行列).

$$\bar{\Pi}_\kappa \text{diag}(1, 1, 1, 0) \bar{\Pi}_\kappa^\top = K_\kappa K_\kappa^\top \quad (20)$$

3.2 絶対 2 級面束拘束条件

射影復元で得られる投影行列 Π_κ は式 (19) の真の投影行列 $\bar{\Pi}_\kappa$ に等しいとは限らない. そこで Π_κ を次のように $\bar{\Pi}_\kappa$ に変換する射影変換 H を求める.

$$\bar{\Pi}_\kappa \simeq \Pi_\kappa H \quad (21)$$

ここに \simeq は両辺が零でない定数倍の関係があることを表す. このように書くのは, 同次座標に作用する射影変換の行列 H は定数倍しても同じ変換を表し, その絶対的なスケールに意味がないからである. 式 (21) を式 (20) に代入すると次式を得る⁷.

$$\Pi_\kappa \Omega \Pi_\kappa^\top \simeq K_\kappa K_\kappa^\top \quad (22)$$

ただし, 次のように置いた.

$$\Omega \equiv H \text{diag}(1, 1, 1, 0) H^\top \quad (23)$$

定義より Ω はランク 3 の半正値対称行列である.

⁶多くの文献ではワールド座標系に相対的なカメラ座標の回転を R_κ , カメラ座標系の原点をワールド座標系から見た位置を t_κ としている. そのように $\{R_\kappa, t_\kappa\}$ を定義すると式 (19) の右辺は $K_\kappa (R_\kappa^\top - R_\kappa^\top t_\kappa)$ となる.

⁷射影幾何学では Ω が「絶対 2 級面束 (双対絶対 2 次曲面)」を表すと解釈され, $\omega_\kappa^* = K_\kappa K_\kappa^\top$ と置くと, これが「絶対 2 次曲線」の投影像に双対な「2 級線束」を表すと解釈される. このことから「絶対 2 級面束拘束条件」という名称が生じたが⁸, 実際に 3 次元復元を行なうにはこのような射影幾何学的な解釈は必要ではない.

3.3 Ω の計算

各フレーム κ の焦点距離 f_κ と光軸点 $(u_{\kappa 0}, v_{\kappa 0})$ の近似値が得られているとし, 次の行列 Q_κ を定義する.

$$Q_\kappa = K_\kappa^{-1} \Pi_\kappa \quad (24)$$

式 (22) から次の関係を得る.

$$Q_\kappa \Omega Q_\kappa^\top \approx (\text{定数}) \times I \quad (25)$$

ゆえに $Q_\kappa \Omega Q_\kappa^\top$ の (11) 要素と (22) 要素はほぼ等しく, (12), (23), (31) 要素はほぼ 0 に近い. 具体的に書くと次のようになる.

$$\sum_{i,j=1}^4 Q_{\kappa(1i)} Q_{\kappa(1j)} \Omega_{ij} - \sum_{i,j=1}^4 Q_{\kappa(2i)} Q_{\kappa(2j)} \Omega_{ij} \approx 0, \quad (26)$$

$$\sum_{i,j=1}^4 Q_{\kappa(1i)} Q_{\kappa(2j)} \Omega_{ij} \approx 0, \quad (27)$$

$$\sum_{i,j=1}^4 Q_{\kappa(2i)} Q_{\kappa(3j)} \Omega_{ij} \approx 0, \quad (28)$$

$$\sum_{i,j=1}^4 Q_{\kappa(3i)} Q_{\kappa(1j)} \Omega_{ij} \approx 0 \quad (29)$$

ただし Q_κ, Ω の (ij) 要素をそれぞれ $Q_{\kappa(ij)}, \Omega_{ij}$ と書いた. 式 (26)~(29) を $\kappa = 1, \dots, M$ に対して連立させて最小二乗法によって解けば Ω が定まる. ただし, Ω には定数倍の不定性があるので, $\|\Omega\| = 1$ と正規化する⁸. 具体的には関数

$$\begin{aligned} K &= \sum_{\kappa=1}^M W_\kappa \left((\text{式 (26) の左辺})^2 + (\text{式 (27) の左辺})^2 \right. \\ &\quad \left. + (\text{式 (28) の左辺})^2 + (\text{式 (29) の左辺})^2 \right) \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^4 A_{ijkl} \Omega_{ij} \Omega_{kl} \end{aligned} \quad (30)$$

を制約条件 $\|\Omega\| = 1$ のもとで最小にすればよい. ただし W_κ は第 κ フレームのデータの重みであり, 初期にはすべて 1 とする. また $3 \times 3 \times 3 \times 3$ テンソル $A = (A_{ijkl})$ を次のように定義した.

$$A_{ijkl} = \sum_{\kappa=1}^M W_\kappa \left(Q_{\kappa(1i)} Q_{\kappa(1j)} Q_{\kappa(1k)} Q_{\kappa(1l)} - Q_{\kappa(1i)} Q_{\kappa(1j)} Q_{\kappa(2k)} Q_{\kappa(2l)} \right)$$

⁸ $n \times n$ 行列 $A = (A_{ij})$ のノルムを $\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n A_{ij}^2}$ と定義する.

$$\begin{aligned}
& -Q_{\kappa(2i)}Q_{\kappa(2j)}Q_{\kappa(1k)}Q_{\kappa(1l)} \\
& +Q_{\kappa(2i)}Q_{\kappa(2j)}Q_{\kappa(2k)}Q_{\kappa(2l)} \\
& +\frac{1}{4}(Q_{\kappa(1i)}Q_{\kappa(2j)}Q_{\kappa(1k)}Q_{\kappa(2l)} \\
& +Q_{\kappa(2i)}Q_{\kappa(1j)}Q_{\kappa(1k)}Q_{\kappa(2l)} \\
& +Q_{\kappa(1i)}Q_{\kappa(2j)}Q_{\kappa(2k)}Q_{\kappa(1l)} \\
& +Q_{\kappa(2i)}Q_{\kappa(1j)}Q_{\kappa(2k)}Q_{\kappa(1l)}) \\
& +\frac{1}{4}(Q_{\kappa(2i)}Q_{\kappa(3j)}Q_{\kappa(2k)}Q_{\kappa(3l)} \\
& +Q_{\kappa(3i)}Q_{\kappa(2j)}Q_{\kappa(2k)}Q_{\kappa(3l)} \\
& +Q_{\kappa(2i)}Q_{\kappa(3j)}Q_{\kappa(3k)}Q_{\kappa(2l)} \\
& +Q_{\kappa(3i)}Q_{\kappa(2j)}Q_{\kappa(3k)}Q_{\kappa(2l)}) \\
& +\frac{1}{4}(Q_{\kappa(3i)}Q_{\kappa(1j)}Q_{\kappa(3k)}Q_{\kappa(1l)} \\
& +Q_{\kappa(1i)}Q_{\kappa(3j)}Q_{\kappa(3k)}Q_{\kappa(1l)} \\
& +Q_{\kappa(3i)}Q_{\kappa(1j)}Q_{\kappa(1k)}Q_{\kappa(3l)} \\
& +Q_{\kappa(1i)}Q_{\kappa(3j)}Q_{\kappa(1k)}Q_{\kappa(3l)}) \quad (31)
\end{aligned}$$

式 (30) は Ω の要素の正値 2 次形式であり, これを最小にする $\|\Omega\| = 1$ の Ω を計算するには次の 10×10 対称行列の最小固有値に対する単位固有ベクトル w を計算すればよい [10] .

$$\begin{pmatrix}
A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & A_{1144} & \sqrt{2}A_{1112} \\
A_{2211} & A_{2222} & A_{2233} & A_{2244} & \sqrt{2}A_{2212} \\
A_{3311} & A_{3322} & A_{3333} & A_{3344} & \sqrt{2}A_{3312} \\
A_{4411} & A_{4422} & A_{4433} & A_{4444} & \sqrt{2}A_{4412} \\
\sqrt{2}A_{1211} & \sqrt{2}A_{1222} & \sqrt{2}A_{1233} & \sqrt{2}A_{1244} & 2A_{1212} \\
\sqrt{2}A_{1311} & \sqrt{2}A_{1322} & \sqrt{2}A_{1333} & \sqrt{2}A_{1344} & 2A_{1312} \\
\sqrt{2}A_{1411} & \sqrt{2}A_{1422} & \sqrt{2}A_{1433} & \sqrt{2}A_{1444} & 2A_{1412} \\
\sqrt{2}A_{2311} & \sqrt{2}A_{2322} & \sqrt{2}A_{2333} & \sqrt{2}A_{2344} & 2A_{2312} \\
\sqrt{2}A_{2411} & \sqrt{2}A_{2422} & \sqrt{2}A_{2433} & \sqrt{2}A_{2444} & 2A_{2412} \\
\sqrt{2}A_{3411} & \sqrt{2}A_{3422} & \sqrt{2}A_{3433} & \sqrt{2}A_{3444} & 2A_{3412} \\
\sqrt{2}A_{1113} & \sqrt{2}A_{1114} & \sqrt{2}A_{1123} & \sqrt{2}A_{1124} & \sqrt{2}A_{1134} \\
\sqrt{2}A_{2213} & \sqrt{2}A_{2214} & \sqrt{2}A_{2223} & \sqrt{2}A_{2224} & \sqrt{2}A_{2234} \\
\sqrt{2}A_{3313} & \sqrt{2}A_{3314} & \sqrt{2}A_{3323} & \sqrt{2}A_{3324} & \sqrt{2}A_{3334} \\
\sqrt{2}A_{4413} & \sqrt{2}A_{4414} & \sqrt{2}A_{4423} & \sqrt{2}A_{4424} & \sqrt{2}A_{4434} \\
2A_{1213} & 2A_{1214} & 2A_{1223} & 2A_{1224} & 2A_{1234} \\
2A_{1313} & 2A_{1314} & 2A_{1323} & 2A_{1324} & 2A_{1334} \\
2A_{1413} & 2A_{1414} & 2A_{1423} & 2A_{1424} & 2A_{1434} \\
2A_{2313} & 2A_{2314} & 2A_{2323} & 2A_{2324} & 2A_{2334} \\
2A_{2413} & 2A_{2414} & 2A_{2423} & 2A_{2424} & 2A_{2434} \\
2A_{3413} & 2A_{3414} & 2A_{3423} & 2A_{3424} & 2A_{3434}
\end{pmatrix} \quad (32)$$

そして, 得られた 10 次元ベクトル w を次のように変換する .

$$\Omega = \begin{pmatrix} w_1 & w_5/\sqrt{2} & w_6/\sqrt{2} & w_7/\sqrt{2} \\ w_5/\sqrt{2} & w_2 & w_8/\sqrt{2} & w_9/\sqrt{2} \\ w_6/\sqrt{2} & w_8/\sqrt{2} & w_3 & w_{10}/\sqrt{2} \\ w_7/\sqrt{2} & w_9/\sqrt{2} & w_{10}/\sqrt{2} & w_4 \end{pmatrix} \quad (33)$$

ただし, 固有ベクトル w は符号が未定である . さらに行列 Ω はランク 3 の半正値対称行列でなければならない . そこで式 (33) の Ω の固有値を $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_4$ とし, 対応する 4 次元単位固有ベクトルを u_1, u_2, u_3, u_4 とする . そして Ω を次のように再定義する .

$$\Omega = \begin{cases} \sigma_1 u_1 u_1^\top + \sigma_2 u_2 u_2^\top + \sigma_3 u_3 u_3^\top & \sigma_3 > 0 \\ -\sigma_4 u_4 u_4^\top - \sigma_3 u_3 u_3^\top - \sigma_2 u_2 u_2^\top & \sigma_2 < 0 \end{cases} \quad (34)$$

式 (26)~(29) よりすべての $\kappa = 1, \dots, M$ に対して $4M$ 個の式が得られ, 未知数は Ω の 10 個 (対称行列だから対角要素を含めた上三角部分のみ) である . これを $\|\Omega\| = 1$ と正規化するから, 解が一意的に求まるためには $4M + 1 \geq 10$ でなければならない . したがって $M \geq 3$ 枚以上の画像が必要である .

3.4 内部パラメータ行列 K_κ の更新

得られた Ω を用いて計算した式 (25) の左辺を次のように置く .

$$Q_\kappa \Omega Q_\kappa^\top = \begin{pmatrix} c_{\kappa(11)} & c_{\kappa(12)} & c_{\kappa(13)} \\ c_{\kappa(21)} & c_{\kappa(22)} & c_{\kappa(23)} \\ c_{\kappa(31)} & c_{\kappa(32)} & c_{\kappa(33)} \end{pmatrix} \quad (35)$$

これが単位行列の定数倍になっていなければ,

$$\delta K_\kappa = \begin{pmatrix} \delta f_\kappa & 0 & \delta u_{\kappa 0} \\ 0 & \delta f_\kappa & \delta v_{\kappa 0} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_\kappa \leftarrow \delta K_\kappa K_\kappa \quad (36)$$

の形の内部パラメータ行列 K_κ の補正を考え, 式 (35) が $\delta K_\kappa \delta K_\kappa^\top$ の定数倍で近似されるように δK_κ を定める . $\delta K_\kappa \delta K_\kappa^\top$ と式 (35) を比較すると, 焦点距離と光軸点の補正量 $\delta f_\kappa, (\delta u_{\kappa 0}, \delta v_{\kappa 0})$ が次のように定まる⁹ .

$$\delta u_{\kappa 0} = \frac{c_{\kappa(13)}}{c_{\kappa(33)}}, \quad \delta v_{\kappa 0} = \frac{c_{\kappa(23)}}{c_{\kappa(33)}}$$

⁹これはコレスキー分解と呼ばれる計算に対応している . ここでは二つの対角要素が等しい形に制限している . δf_κ は積による補正, $(\delta u_{\kappa 0}, \delta v_{\kappa 0})$ は和による補正であり, 理想的には $\delta f_\kappa = 1, (\delta u_{\kappa 0}, \delta v_{\kappa 0}) = (0, 0)$ である .

$$\delta f_\kappa = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{c_\kappa(11) + c_\kappa(22)}{c_\kappa(33)} - \delta u_{\kappa 0}^2 - \delta v_{\kappa 0}^2 \right)} \quad (37)$$

投影行列 Π_κ は定数倍を除いてしか定義されていないので，式 (24) の Q_κ にも定数倍の不定性がある．そこで式 (35) がなるべく単位行列に近くなるように Q_κ を $\sqrt{c_\kappa(33)}$ で割る．

ただし，データの誤差が大きいために式 (37) の根号の中や $c_\kappa(33)$ が負になることもあり得る．その場合はそのフレームに対する計算は行わない．また式 (35) と単位行列の定数倍との食い違いを評価し，それに応じてそのフレームに対する重み W_κ を調節する．そして反復の終了条件としては，誤差の大きいフレームを除外するために，全フレームの食い違いの評価量の合計ではなくメジアンを用いる．

3.5 射影変換行列の H の計算

Ω が式 (34) のように得られるから，任意のベクトル v を用いて $\sigma_3 > 0$ のときは $H = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma_1}u_1 & \sqrt{\sigma_2}u_2 & \sqrt{\sigma_3}u_3 & v \end{pmatrix}$ とし， $\sigma_2 < 0$ のときは $H = \begin{pmatrix} \sqrt{-\sigma_4}u_4 & \sqrt{-\sigma_3}u_3 & \sqrt{-\sigma_2}u_2 & v \end{pmatrix}$ とすれば式 (23) が満たされる．ベクトル v の不定性はワールド座標系の絶対的な位置が不定であることに対応している．ただし， H は正則行列でなければならぬから， v は第 1, 2, 3 列と線形独立でなければならぬ．そこで v として第 1, 2, 3 列と直交する単位ベクトルを選ぶ．これには Ω の残った単位固有ベクトルをそのまま用いればよい．

3.6 ユークリッド化の計算手順

以上より，ユークリッド化を行なう射影変換 H と各カメラの内部パラメータ行列 K_κ を並行して計算する次の手順が得られる．

- 入力: • 各フレームの光軸点と焦点距離の近似値 $(u_{\kappa 0}, v_{\kappa 0}), f_\kappa, \kappa = 1, \dots, M$.
 • 投影行列 $\Pi_\kappa, \kappa = 1, \dots, M$.
 出力: • 射影変換行列 H
 • 内部パラメータ行列 $K_\kappa, \kappa = 1, \dots, M$.

計算:

1. 次のように置く¹⁰ .

$$\hat{H} = I, \quad \hat{K} = I, \quad \hat{J}_{\text{med}} = \infty \quad (38)$$

2. K_κ を式 (18) のように定め， $W_\kappa = 1, \gamma_\kappa = 1$ と置く．

¹⁰ \hat{H} の I は 4×4 の単位行列， \hat{K} の I は 3×3 の単位行列であり， ∞ は十分大きい値を表す．

3. 次のように Q_κ を定義する．

$$Q_\kappa = \gamma_\kappa K_\kappa^{-1} \Pi_\kappa \quad (39)$$

4. 式 (31) のテンソル \mathcal{A} を計算する．
5. 式 (32) の 10×10 対称行列の最小固有値に対する 10 次元単位固有ベクトル w を計算する．
6. 式 (33) によって仮の Ω を計算する．
7. その Ω の固有値 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_4$ と対応する単位固有ベクトル u_1, u_2, u_3, u_4 を計算する．
8. 式 (34) によって Ω を再計算する．
9. H を次のように計算する．

$$H = \begin{cases} \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma_1}u_1 & \sqrt{\sigma_2}u_2 & \sqrt{\sigma_3}u_3 & u_4 \\ & & & \sigma_3 > 0 \\ \sqrt{-\sigma_4}u_4 & \sqrt{-\sigma_3}u_3 & \sqrt{-\sigma_2}u_2 & u_1 \\ & & & \sigma_2 < 0 \end{pmatrix} \\ \end{cases} \quad (40)$$

10. 次の計算を $\kappa = 1, \dots, M$ に渡って行う．

- (a) 式 (35) によって $c_\kappa(ij)$ を計算し，次のように置く．

$$F_\kappa = \frac{c_\kappa(11) + c_\kappa(22)}{c_\kappa(33)} - \left(\frac{c_\kappa(13)}{c_\kappa(33)} \right)^2 - \left(\frac{c_\kappa(23)}{c_\kappa(33)} \right)^2 \quad (41)$$

- (b) $c_\kappa(33) > 0$ かつ $F_\kappa > 0$ であれば式 (37) によって $\delta u_{\kappa 0}, \delta v_{\kappa 0}, \delta f_\kappa$ を計算し，次のように置く．

$$J_\kappa = \left(\frac{c_\kappa(11)}{c_\kappa(33)} - 1 \right)^2 + \left(\frac{c_\kappa(22)}{c_\kappa(33)} - 1 \right)^2 + 2 \frac{c_\kappa(12)^2 + c_\kappa(23)^2 + c_\kappa(31)^2}{c_\kappa(33)^2} \quad (42)$$

そして K_κ, γ_κ を次のように更新する．

$$K_\kappa \leftarrow K_\kappa \delta K_\kappa, \quad \gamma_\kappa \leftarrow \frac{\gamma_\kappa}{\sqrt{c_\kappa(33)}} \quad (43)$$

- (c) そうでなければ $J_\kappa = \infty$ と置く．

11. 次のメジアンを計算する．

$$J_{\text{med}} = \text{med}_{\kappa=1}^M J_\kappa \quad (44)$$

12. $J_{\text{med}} \approx 0$ であれば H, K_κ を返して終了する．
13. そうでなくても $J_{\text{med}} \geq \hat{J}_{\text{med}}$ であれば \hat{H}, \hat{K}_κ を H, K_κ として返して終了する．
14. そうでなければ次のように更新して，ステップ 3 に戻る．

$$\begin{aligned} \hat{J}_{\text{med}} &\leftarrow J_{\text{med}}, & \hat{H} &\leftarrow H, \\ \hat{K}_\kappa &\leftarrow K_\kappa, & W_\kappa &\leftarrow e^{-J_\kappa/J_{\text{med}}} \end{aligned} \quad (45)$$

4. 3次元復元

4.1 3次元位置と運動パラメータの計算

射影変換 H が求めれば、正しい投影行列と3次元位置の同次座標が定数倍を除いて

$$\bar{\Pi}_\kappa = \Pi_\kappa H, \quad \bar{X}_\alpha = H^{-1} X_\alpha \quad (46)$$

と求まる。3次元位置 $(X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha)$ は式(4)から定まる。

一方、内部パラメータ行列 K_κ が求めれば、カメラの運動パラメータ R_κ, t_κ は

$$K_\kappa^{-1} \Pi_\kappa H \simeq \begin{pmatrix} R_\kappa & t_\kappa \end{pmatrix} \quad (47)$$

から求まる。すなわち $K_\kappa^{-1} \Pi_\kappa H$ の最初の3列がすべて単位ベクトルになるようにスケールを調節し¹¹、その3列が作る行列の行列式が正になるように符号を選ぶ。そうすれば $K_\kappa^{-1} \Pi_\kappa H$ の最初の3列が作る行列が R_κ であり、第4列が t_κ となる。

ただし、データに誤差があると、このように計算した R_κ は各列が直交する厳密な回転行列であるとは限らない。そこで R_κ の各列が厳密に直交するように最適に補正する。それには、よく知られているように

$$R_\kappa = U \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) V^T \quad (48)$$

と特異値分解し、その特異値をすべて1に置き換えて $R_\kappa = UV^T$ とすればよい[10]。

4.2 鏡像解の除去

このように復元した3次元形状にはさらに鏡像の不定性がある。これは3次元復元が「各点の3次元位置はその投影像の定める視線にある」という条件のみに基づいており、「カメラの前方にある」という条件¹²を用いていないからである。したがって、真の形状の鏡像がカメラの後方に復元される可能性がある。

これを判定するには各特徴点の3次元座標 $(X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha)$ を各フレームのカメラ座標系から見た位置に変換する必要がある。第 κ フレームに対する位置 $(X_{\kappa\alpha}^c, Y_{\kappa\alpha}^c, Z_{\kappa\alpha}^c)$ は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} X_{\kappa\alpha}^c \\ Y_{\kappa\alpha}^c \\ Z_{\kappa\alpha}^c \end{pmatrix} = t_\kappa + R_\kappa \begin{pmatrix} X_\alpha \\ Y_\alpha \\ Z_\alpha \end{pmatrix} \quad (49)$$

¹¹ 誤差のある実際のデータはノルムの平均が1となるようにスケールを定める。

¹² Hartley [4] はこれをカイラリティと呼んでいる。

そこで、復元した形状がカメラの前方にあるかどうかの判定条件を次のように置く。

$$\sum_{\alpha=1}^N \text{sgn}(Z_{1\alpha}^c) > 0 \quad (50)$$

符号関数¹³ $\text{sgn}(x)$ を用いるのは、単に $\sum_{\alpha=1}^N Z_{1\alpha}^c > 0$ とすると、一つの頂点でも誤差のために $Z_{1\alpha}^c \approx -\infty$ となると判定が反転する恐れがあるからである¹⁴。式(50)が満たされなければ、 $t_\kappa, X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha$ の符号をすべて反転させる。

5. まとめ

本稿では未校正カメラで撮影した複数の画像間の特徴点の対応から代数的に3次元形状を計算する自己校正法のアルゴリズムとして決定版と思われる最新の方法を選び、その計算手順を詳細に述べた。これは射影変換の不定性のある3次元形状を計算する「射影復元」と、それを正しい形状に変換する「ユークリッド化」の2段階から成る。前者にはMahamudら[14]の方法を用い、後者にはSeoら[20]の方法を用い、精度や計算の安定性を向上させる新しい工夫を加えた。

本稿に示した射影復元は記法や記述が原著論文[14]とは異なっているが、本質的には同一である。一方、ユークリッド化はかなりの工夫を加えた。まずSeoらは光軸点 $(u_{\kappa 0}, v_{\kappa 0})$ のみを補正して式(35)が対角行列に近づくように反復しているが(その結果、その対角要素から焦点距離が得られる)、本稿では焦点距離 f_κ も補正して式(35)を単位行列の定数倍に近づけた。

またSeoらは光軸点 $(u_{\kappa 0}, v_{\kappa 0})$ の補正量 $(\delta u_{\kappa 0}, \delta v_{\kappa 0})$ がある微量(例えば0.2画素)になるまで反復を行っているが、我々の実験によると、データの誤差が大きいと補正量 $(\delta u_{\kappa 0}, \delta v_{\kappa 0})$ が設定したしきい値以下にならないことがあった。しかし、到達できる程度はデータによって異なるので、一律なしきい値が設定できない。そこで我々は式(35)と単位行列の定数倍との食い違いを評価値として、これを収束条件に用いた。

さらに、各フレームの精度の差を反映する重み W_κ を導入し、その食い違いの評価値に応じて各フレ

¹³ $\text{sgn}(x)$ は $x > 0, x = 0, x < 0$ に応じてそれぞれ $1, 0, -1$ を返す関数である。

¹⁴ 本来はすべての時刻でカメラの前方にあるように、例えば $\sum_{\kappa=1}^M \sum_{\alpha=1}^N \text{sgn}(Z_{\kappa\alpha}^c) > 0$ とするべきであるが、実際問題では第1カメラのみを考えれば十分であろう。

ムを重みづけした。そして、仮定に矛盾するデータを含むフレームは $W_{\kappa} = 0$ とした。さらに、収束の判定は全フレームに対する評価値の和ではなく、メジアンを用いた。このような工夫により、どんなに誤差があるデータでも計算が破綻せずに収束させることができた。

本稿の方法は誤差に対する最適化を考慮しない代数的な計算法である。誤差のあるデータに対してどの程度の精度があるかについては、シミュレーション画像や実ビデオ画像を用いて次報 [17] で報告する。

謝辞: 本研究の一部は文部科学省科学研究費基盤研究 C (No. 17500112) の助成によった。有益なコメントを頂いた産業技術総合研究所の植芝俊夫氏に感謝します。

参考文献

- [1] 浅原 清太郎, 金谷 健一, 菅谷 保之, ハノ・アッカーマン, 未校正因子分解法による 3 次元復元: 比較実験, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-151-20 (2005-11), 145–152.
- [2] S. Christy and R. Horaud, Euclidean shape and motion from multiple perspective views by affine iterations, *IEEE Trans. Patt. Anal. Machine Intell.*, **18-11** (1996-11), 1098–1104.
- [3] K. Deguchi, Factorization method for structure from perspective multi-view images, *IEICE Trans. Inf & Syst.*, **E81-D-11** (1998-11), 1281–1289.
- [4] R. I. Hartley, Chirality, *Int. J. Comput. Vision*, **21-6** (1998-1), 41–61.
- [5] R. Hartley and A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2000.
- [6] A. Heyden, R. Berthilsson, and G. Sparr, An iterative factorization method for projective structure and motion from image sequences, *Image Vision Comput.*, **17-13** (1999-11), 981–991.
- [7] A. Heyden and K. Åström, Euclidean reconstruction from image sequences with varying and unknown focal length and principal point, *Proc. IEEE Conf. Comput. Vision Patt. Recog.*, June 1997, Puerto Rico, pp. 438–443.
- [8] A. Heyden and K. Åström, Flexible calibration: Minimal cases for auto-calibration, *Proc. 7th Int. Conf. Computer. Vision*, September 1999, Kerkyra, Greece, Vol. 1, pp. 350–355.
- [9] 金出武雄, コンラッド・ポールマン, 森田俊彦, 因子分解法による物体形状とカメラ運動の復元, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J74-D-II-8** (1993-8), 1497–1505.
- [10] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 1996; Dover, New York, U.S.A., 2005.
- [11] 金谷健一, 「形状 CAD と図形の数学」, 共立出版, 1998.
- [12] 金谷健一, 浅原清太郎, 菅谷保之, ハノ・アッカーマン, 未校正因子分解法: カメラモデルを指定しないユークリッド復元, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-150-6 (2005-9), 131–138.
- [13] 金谷健一, 菅谷保之, 因子分解法の完全レシピ, 電子情報通信学会技術報告, PRMU2003-118 (2003-10), 19–24.
- [14] S. Mahamud and M. Hebert, Iterative projective reconstruction from multiple views, *Proc. IEEE Conf. Comput. Vision Patt. Recog.*, June 2000, Hilton Head Island, SC, U.S.A., Vol. 2, pp. 430–437.
- [15] S. Mahamud, M. Hebert, Y. Omori, and J. Ponce, Provably-convergent iterative methods for projective structure from motion, *Proc. IEEE Conf. Comput. Vision Patt. Recog.*, December 2001, Kauai, HI, U.S.A., Vol. 1, pp. 1018–1025.
- [16] 宮川 勲, 石川裕治, 若林佳織, 有川知彦, 空撮映像からの透視投影型因子分解法による空間連鎖復元, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J87-D-II-4** (2004-4), 942–957.
- [17] 森 昭延, 金谷 健一, 菅谷 保之, 最新の自己校正法の性能評価, 情報処理学会研究報告, 2006-CVIM-154-37 (2006-5), to appear.
- [18] C. J. Poelman and T. Kanade, A paraperspective factorization method for shape and motion recovery, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **19-3** (1997-3), 206–218.
- [19] M. Pollefeys, R. Koch, and L. Van Gool, Self-calibration and metric reconstruction in spite of varying and unknown internal camera parameters, *Int. J. Comput. Vision*, **32-1** (1999-8), 7–25.
- [20] Y. Seo and H. Heyden, Auto-calibration by linear iteration using the DAC equation, *Image and Vision Computing*, **22-11** (2004-9), 919–926.
- [21] Y. Seo and K.-S. Hong, A linear metric reconstruction by complex eigen-decomposition, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, **E84-D-12** (2001-12), 1626–1632.
- [22] P. Sturm and B. Triggs, A factorization based algorithm for multi-image projective structure and motion, *Proc. 4th Euro. Conf. Comput. Vision*, April 1996, Cambridge, U.K., Vol. 2, pp. 709–720.
- [23] C. Tomasi and T. Kanade, Shape and motion from image streams under orthography—A factorization method, *Int. J. Comput. Vision*, **9-2** (1992-10), 137–154.
- [24] B. Triggs, Factorization methods for projective structure and motion, *Proc. IEEE Conf. Comput. Vision Patt. Recog.*, June 1996, San Francisco, CA, U.S.A., pp. 845–851.
- [25] B. Triggs, Autocalibration and the absolute quadric, *Proc. IEEE Conf. Comput. Vision Patt. Recog.*, June 1997, San Juan, Puerto Rico, pp. 609–614.
- [26] 植芝俊夫, 富田文明, 初期モデルとしてアフィン投影を用いた多視点透視投影画像からの運動と形状の復元, 情報処理学会研究報告, 1997-CVIM-107-1 (1997-9), 1–8.
- [27] T. Ueshiba and F. Tomita, A factorization method for perspective and Euclidean reconstruction from multiple perspective views via iterative depth estimation, *Proc. 5th Euro. Conf. Comput. Vision*, June 1998, Freiburg, Germany, Vol. 1, pp. 296–310.
- [28] 植芝俊夫, 岡谷貴之, 佐藤智和, カメラキャリブレーション, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-148-1 (2005-3), 1–18.
- [29] 浮田宗伯, 尺長健, 透視投影因子分解法による広範囲画像系列からの 3 次元物体モデル生成, 電子情報通信学会技術報告 PRMU97-276 (1998-3), 81–88.