部分空間分離法とモデル選択による運動物体の分離

黒澤 典義　　金谷 健一

群馬大学工学部情報工学科

複数画像間の対応点を独立に移動する物体に分割する Costeira-Kanade 法を Tomasi-Kanade の「因子分解法」から切り離して「部分空間分離法」として数学的に定式化する。そして、次元補正法、幾何学的 AIC によるモデル選択、最小メジアン法等の手法を導入し、ロバストなアルゴリズムを構成する。さらに精度の下界を導き、シミュレーション実験によってこれと比較して部分空間分離法の有効性を示す。本手法の大きな特徴は、経験的に調節すべきパラメータを何も含んでいないことである。最後に実画像に適用した例を示し、部分空間分離法の証明を付録にまとめる。

キーワード: 運動物体分離、部分空間分離法、幾何学的モデル選択、領域分割、幾何学的 AIC、ロバスト推定

Motion Segmentation by Subspace Separation and Model Selection

Noriyoshi Kurosawa and Kenichi Kanatani

Department of Computer Science, Gunma University, Kiryu, Gunma 376-8515 Japan

We view the Costeira-Kanade method for motion segmentation as *subspace separation* and formulate it as a pure mathematical theorem independent of the Tomasi-Kanade factorization method. Then, we present a robust alogorithm for it by incorporating such techniques as dimension correction, model selection using the geometric AIC, and least-median fitting. We also derive a lower bound on the accuracy of segmentation, with which we compare the performance of our method by doing numerical simulations. Our method is very effective, and it does not involve any parameters to be adjusted emiprically. A real image example is also shown. The proof of the subspace separation theorem is given in the appendix.

Key words: motion segmentation, subspace separation, geometric model selection, image segmentation, geometric AIC, robust estimation

謝辞: 本研究に関して有益な議論を頂いた東芝の牧淳人氏、電子技術総合研究所の市村直幸氏に感謝します。本研究の一部は文部省科学研究費基盤研究C (2) (No. 11680377) によった。

*376-8515 桐生市天神町 1–5–1, 群馬大学工学部情報工学科, Tel: (0277)30-1844, Fax: (0277)30-1801
E-mail: `kurosawa@ail.cs.gunma-u.ac.jp`, `kanatani@cs.gunma-u.ac.jp`

1. 序論

画像中の物体を背景から切り出すこと (「領域分割」) はコンピュータビジョンの最も難しい問題の一つである。動画像列を用いることはその方法の一つであり、人間の目にも背景と独立に運動する物体は識別しやすいことがその根拠である。

背景が静止している場合はフレーム間差分を基く手法、背景も移動する場合はオプティカルフローに基く手法など多くの研究があるが、Costeira-Kanade [1] は動画像から3次元復元する Tomasi-Kanade [15] の「因子分解法」からヒントを得て、複数画像間の対応点を独立に移動する物体に分割する手法を提案した。その後、この手法のさまざまな応用や改良が研究された [2, 3, 4, 12]。

最近、金谷 [9] はこの Costeira-Kanade 法が単純な数学的事実を述べているのに過ぎず、Tomasi-Kanade の因子分解法とは無関係であることを指摘した。そして、無理に因子分解法と結び付けることにより生じる導出の不明確さを除去し、線形代数の定理としての「部分空間分離法」を定式化した。Gear [2] は Costeira-Kanade 法とは異なる方法で複数物体の分離アルゴリズムを構成しているが、これも部分空間分離の別の表現法である。

牧ら [10] は複数光源の分離問題も同じ数学構造があることを指摘し、部分空間分離法を適用している。このように、Costeira-Kanade 法を因子分解法と切り離すことにより、単に運動物体の分離に限定されず、コンピュータビジョンの多くの問題に適用が可能となる。

本論文では数学的問題としての部分空間分離法のロバストなアルゴリズムを提案し、従来手法と比較する。従来の研究 [1, 2, 3, 12] は皆、データから導かれるある行列の要素の零・非零に基いているが、本来零である要素にデータの誤差が与える影響の解析が非常に困難であり、適切なしきい値を設定することが難しい。Gear [2] は発見的な方法や近似を組み合わせてこれを試みているが、その有効性の判定は難しい。

本論文の着目点は、ランダム誤差はデータに入る以上、誤差に対処する統計的手法を構成するにはデータから計算される行列ではなく、**元々のデータ空間の解析に基かなければならない**ということである。

この考え方は市村・富田 [4] に一部取り入れられているが、本論文ではデータ空間の線形構造をより直接的に利用する。このためには本論文では運動物体の個数や運動の形態 (2次元運動か3次元運動か、等) が与えられていると仮定する。従来の研究 [1, 2, 12] ではそれらの判定に努力が注がれていたが、これは非常に困難な問題であり、物体の分離とは独立に考慮すべき問題である。本論文では分離問題に絞って最適な方法を探究する。

このとき重要なことは手法の評価である。従来は単に他人の提案手法と比較することが多かったが、手法の最適性を知るには何らかの理論限界と比較しなければならない。本論文では誤差のモデルとデータ空間の線形構造から導かれる精度の下界と部分空間分離法を比較する。

以下、まず運動物体の分離が部分空間の分離に等価であることを述べ、部分空間分離法を定理の形で述べる。次に、次元補正法、幾何学的 AIC によるモデル選択、最小メジアン法等の手法を導入するとともに、計算を高速化する方法についても述べる。そして、シミュレーション実験によって部分空間分離法を精度の下界と比較し、その有効性を示す。本手法の大きな特徴は、**経験的に調節すべきパラメータを何も含んでいない**ことである。最後に実画像に適用した例を示し、部分空間分離法の証明を付録にまとめる。

2. 運動物体の分離

静止したカメラ座標系を世界座標系と同一視し、XY 面を画像面、Z 軸をカメラの光軸とみなす。ある剛体に属する特徴点 p_α の第 κ 画像中の画像座標を $(x_{\kappa\alpha}, y_{\kappa\alpha})$ とする。これを $\kappa = 1, ..., M$ に渡って並べた $2M$ 次元ベクトル $\boldsymbol{p}_\alpha$ を次のように定義する。

$$\boldsymbol{p}_\alpha = \begin{pmatrix} x_{1\alpha} & y_{1\alpha} & x_{2\alpha} & y_{2\alpha} & \cdots & y_{M\alpha} \end{pmatrix}^\top \tag{1}$$

物体に任意に物体座標系を固定し、α 番目の特徴点 p_α の物体座標系に関する座標を $(a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha)$ とする。時刻 κ での物体座標系の原点の位置と各座標基底ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{t}_\kappa$、$\{\boldsymbol{i}_\kappa, \boldsymbol{j}_\kappa, \boldsymbol{k}_\kappa\}$ とすると、特徴点 p_α の時刻 κ における位置 $\boldsymbol{r}_{\kappa\alpha}$ は次のように書ける。

$$\boldsymbol{r}_{\kappa\alpha} = \boldsymbol{t}_\kappa + a_\alpha \boldsymbol{i}_\kappa + b_\alpha \boldsymbol{j}_\kappa + c_\alpha \boldsymbol{k}_\kappa \tag{2}$$

ベクトル $\boldsymbol{t}_\kappa, \boldsymbol{i}_\kappa, \boldsymbol{j}_\kappa, \boldsymbol{k}_\kappa$ の投影、すなわち Z 座標を取り除いた2次元ベクトルを $\kappa = 1, ..., M$ に渡って縦に並べた $2M$ 次元ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{m}_0, \boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{m}_3$ とする。

平行投影を仮定すると、式 (1) で定義した $2M$ 次元ベクトル $\boldsymbol{p}_\alpha$ が次のように表せる。

$$\boldsymbol{p}_\alpha = \boldsymbol{m}_0 + a_\alpha \boldsymbol{m}_1 + b_\alpha \boldsymbol{m}_2 + c_\alpha \boldsymbol{m}_3 \tag{3}$$

これによって各特徴点 p_α の履歴が $2M$ 次元空間 $\mathcal{R}^{2M}$ の1点として表せる。そして N 個の点 $\boldsymbol{p}_\alpha$ がベクトル $\{\boldsymbol{m}_0, \boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{m}_3\}$ の張る4次元部分空間 $\mathcal{L}$ に

含まれる。これは平行投影のみならず、**弱透視変換**や**疑似透視変換**を含む一般のアフィンカメラ [5] でも同様である。

以上より 3 次元運動をする複数物体を分離するには $2M$ 次元空間 $\mathcal{R}^{2M}$ の点集合を**互いに異なる 4 次元部分空間に分割すればよい**。物体が画像面内で 2 次元剛体運動をする場合は式 (3) で $\boldsymbol{m}_3$ が恒等的に $\boldsymbol{0}$ となるから、$2M$ 次元空間 $\mathcal{R}^{2M}$ の点集合を**互いに異なる 3 次元部分空間に分割すればよい**。

3. 部分空間分離法

n 次元空間 $\mathcal{R}^n$ の N 点 $\boldsymbol{p}_\alpha$, $\alpha = 1, ..., N$ が r 次元部分空間を張るとする。$N \times N$ **計量行列** $\boldsymbol{G} = (G_{\alpha\beta})$ を次のように定義する ($(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ はベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積を表す)。

$$G_{\alpha\beta} = (\boldsymbol{p}_\alpha, \boldsymbol{p}_\beta) \tag{4}$$

この固有値を $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_N$、対応する固有ベクトルの正規直交系を $\{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_N\}$ とする。そして $N \times N$ **作用行列** $\boldsymbol{Q} = (Q_{\alpha\beta})$ を次のように定義する。

$$\boldsymbol{Q} = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^\top \tag{5}$$

添え字集合 $\mathcal{I} = \{1, ..., N\}$ を次のように m 個の部分集合に分割する。

$$\mathcal{I}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{I}_m = \mathcal{I}, \quad \mathcal{I}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{I}_m = \emptyset \tag{6}$$

そして第 i 集合 $\{\boldsymbol{p}_\alpha\}$, $\alpha \in \mathcal{I}_i$ の張る部分空間を $\mathcal{L}_i$ とする。もしこれら m 個の部分空間 $\mathcal{L}_i$, $i = 1, ..., m$ が互いに線形独立であれば次の定理が成り立つ。

【定 理 1】 点 $\boldsymbol{p}_\alpha$, $\boldsymbol{p}_\beta$ が異なる部分空間に属せば $\boldsymbol{Q}$ の $(\alpha\beta)$ 要素は 0 である。

$$Q_{\alpha\beta} = 0, \ \ \alpha \in \mathcal{I}_i, \ \ \beta \in \mathcal{I}_j, \ \ i \neq j \tag{7}$$

Costeira と Kanade [1] はこれを特異値分解による因子分解法 [15] に結び付けて証明したが[1]、これは線形代数の定理として因子分解法や特異値分解に無関係に証明できる [9]。証明の骨子は次の事実である。n 次元空間 $\mathcal{R}^n$ の N $(> n)$ 点は線形従属であるから $\sum_{\alpha=1}^{N} c_\alpha \boldsymbol{p}_\alpha = \boldsymbol{0}$ となるすべてが零ではない係数 $\{c_\alpha\}$ が無数に存在する。しかし $\{\boldsymbol{p}_\alpha\}$ が $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 = \mathcal{R}^n$ であるような二つの部分空間 $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ に分離されていれば、そのような係数 $\{c_\alpha\}$ はすべて $\sum_{\mathbf{p}_\alpha \in \mathcal{L}_1} c_\alpha \boldsymbol{p}_\alpha = \boldsymbol{0}$ となるものと $\sum_{\mathbf{p}_\alpha \in \mathcal{L}_2} c_\alpha \boldsymbol{p}_\alpha = \boldsymbol{0}$ となるものとから生成される。これを "零空間"、"正規直交基底" などの概念によって形式的に述べた証明を付録に示す。

[1] 文献 [1] の証明を文字通り解釈すると論理的におかしい [9]。

4. 分離手法

以下では簡単のため 2 個の物体が独立に運動する場合を考えるが、3 個以上の場合も容易に拡張できる。

データに誤差があると作用行列 $\boldsymbol{Q} = (Q_{\alpha\beta})$ のすべての要素が一般に非零である。これを分離する標準的な方法は $|Q_{\alpha\beta}|$ が大きい点 $\boldsymbol{p}_\alpha$, $\boldsymbol{p}_\beta$ を同一部分空間に併合していく方法である。そして行列 $\boldsymbol{Q}$ の第 α, β 行および第 α, β 列が連続するように行と列を入れ換えていけば、$\boldsymbol{Q}$ が最終的に近似的なブロック対角行列になると期待される。これを形式的に書けば、第 i 部分空間 $\mathcal{L}_i$ と第 j 部分空間 $\mathcal{L}_j$ の**類似度**を

$$s_{ij} = \begin{cases} 0 & \mathcal{L}_i = \emptyset \text{ または } \mathcal{L}_j = \emptyset \\ \max_{\mathbf{p}_\alpha \in \mathcal{L}_i, \mathbf{p}_\beta \in \mathcal{L}_j} |Q_{\alpha\beta}| & \text{その他} \end{cases} \tag{8}$$

と定義し、これが大きい二つの部分空間 (ブロック) を一つに併合する操作を続けることである。

このような方法は**貪欲法**と呼ばれ、Costeira-Kanade [1] も同様な方法を用いている。彼らの規準は上式の $\max_{\mathbf{p}_\alpha \in \mathcal{L}_i, \mathbf{p}_\beta \in \mathcal{L}_j} |Q_{\alpha\beta}|$ を $\sum_{\mathbf{p}_\alpha \in \mathcal{L}_i, \mathbf{p}_\beta \in \mathcal{L}_j} {Q_{\alpha\beta}}^2$ にすることに相当する。あるいは $\sum_{\mathbf{p}_\alpha \in \mathcal{L}_i, \mathbf{p}_\beta \in \mathcal{L}_j} |Q_{\alpha\beta}|$ としてもよい。しかし、実験によればどの規準でもほとんど差はない。

最適な規準を得るためには誤差の統計解析が必要であるが、一つの特徴点の誤差が $\boldsymbol{Q}$ のすべての要素に影響を与え、各 $Q_{\alpha\beta}$ はデータの誤差の複雑な非線形関数となる。また、本来零でない $Q_{\alpha\beta}$ の値については何の情報も存在しない。Gear [2] は分離を二部グラフの分割問題とみなして貪欲法で解いているが、適切な最小化規準を得ることが難しく、複雑な統計解析と発見的方法を組み合わせている。

市村 [3] はこれを避ける方法として、$\boldsymbol{Q}$ の各行の要素をその絶対値によってソートし、それに大津の判別規準 [13] を用いてしきい処理し、その判別規準が最大値をとる行の判別結果を用いる方法を提案している。

5. 次元補正法

部分空間分離法は任意の次元の組み合わせに適用できるが、特に等しい次元 d の部分空間に分離する場合を考える (各部分空間は d 個以上の点を含むとする)。2 次元運動の場合は $d = 3$ であり、3 次元運動の分離の場合は $d = 4$ である。

このときに有効な手法は、類似度の高い要素を併合していく過程で、d 個以上を併合した場合にはそれらに最適に部分空間を当てはめ、各々の要素をその部分空間に射影した点に置きかえることである。ただし、併合した要素を次のステップでさらに別の要

素と併合する場合は、改めて原データをその併合した部分空間に射影する。

3 節に述べたように、定理 1 は線形従属を示す部分的に閉じた係数 $\{c_\alpha\}$ の存在に基いている。誤差があればそのような係数が存在しないが、上記の射影は併合の過程でそのような閉じた係数を積極的に作り出すものである。そして、改めて作用行列 $\boldsymbol{Q}$ を計算して次の併合に進めば、最終的に $\boldsymbol{Q}$ が完全なブロック対角行列となって終了する。

この計算のためには、d 次元部分空間に併合する点集合を $\{\boldsymbol{p}_\alpha\}$, $\alpha = 1, ..., N$ とするとき、$n \times n$ **モーメント行列**

$$\boldsymbol{M} = \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{p}_\alpha \boldsymbol{p}_\alpha^\top \tag{9}$$

の大きい順に並べた固有値 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_\nu$ と対応する単位固有ベクトル $\{\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{u}_\nu\}$ を計算する ($\nu = \min(n, N)$)。そして次の**射影行列**を計算する。

$$\boldsymbol{P}_d = \sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^\top \tag{10}$$

併合後の位置 $\{\boldsymbol{p}'_\alpha\}$ は次のように与えられる。

$$\boldsymbol{p}'_\alpha = \boldsymbol{P}_d \boldsymbol{p}_\alpha \tag{11}$$

このときの**残差** (データと当てはめた部分空間との距離の二乗和) は次のようになる。

$$\hat{J} = \sum_{i=d+1}^{\nu} \lambda_i \tag{12}$$

6. 幾何学的モデル選択

作用行列 $\boldsymbol{Q}$ の持つ情報は、誤差がない場合に "零か非零か" ということのみである。データ $\{\boldsymbol{p}_\alpha\}$ に誤差があるとき、誤差は $\boldsymbol{Q}$ の非零要素の値と直接の関係はない。したがって、誤差のあるデータの分類には $\boldsymbol{Q}$ ではなく "元々のデータ"$\{\boldsymbol{p}_\alpha\}$ を用いる統計的解析が必要となる。

各点 $\boldsymbol{p}_\alpha$ の各要素には標準偏差 ϵ の正規分布に従う独立な誤差が加わると仮定する (より一般の誤差モデルにも容易に拡張できる)。そして、併合の候補となる二つの部分空間に対して、別々の部分空間を当てはめた場合と一つの部分空間を当てはめた場合に対して残差を比較し、どちらが統計的に妥当かを判定する。

当然ながら一つの部分空間を当てはめるほうが調節できる自由度が小さいので残差は常に増加する。そこで残差の増加と自由度の減少とのバランスを評価する必要がある。その尺度としてよく知られているのが**幾何学的 AIC**[6, 7] である。

いま $\mathcal{L}_i$, $\mathcal{L}_j$ が併合の候補であるとし、含まれる点数をそれぞれ N_i, N_j とする。それぞれの残差 $\hat{J}_i$, $\hat{J}_j$ は次元補正を行う過程で式 (12) で計算される。これらを一つの部分空間に合併した場合の残差を $\hat{J}_{i\oplus j}$ とする。n 次元空間の d 次元部分空間は $d(n-d)$ 個のパラメータで指定されるから[2]、一つの部分空間を当てはめる場合の幾何学的 AIC は次のようになる。

$$\text{G-AIC}_{i\oplus j} = \hat{J}_{i\oplus j} + 2d\Big(N_i + N_j + n - d\Big)\epsilon^2 \tag{13}$$

二つの部分空間を別々に当てはめる場合は自由度はそれぞれの部分空間の和となるから、幾何学的 AIC は次のようになる。

$$\text{G-AIC}_{i,j} = \hat{J}_i + \hat{J}_j + 2d\Big(N_i + N_j + 2(n-d)\Big)\epsilon^2 \tag{14}$$

そして $\text{G-AIC}_{i\oplus j} < \text{G-AIC}_{i,j}$ なら併合することが統計的に妥当であると考えられる。ただし、この判定のためには $N_i + N_j > d$ でなければならない (そうでなければ併合しても残差が 0 なので無条件に併合される)。また $|Q_{\alpha\beta}|$ の持つ情報が無視される。そこで両者を加味して、第 i 部分空間 $\mathcal{L}_i$ と第 j 部分空間 $\mathcal{L}_j$ の類似度を

$$s_{ij} = \begin{cases} 0 & \mathcal{L}_i = \emptyset \text{ または } \mathcal{L}_j = \emptyset \\ \dfrac{\text{G-AIC}_{i,j}}{\text{G-AIC}_{i\oplus j}} \max_{\mathbf{p}_\alpha \in \mathcal{L}_i, \mathbf{p}_\beta \in \mathcal{L}_j} |Q_{\alpha\beta}| & \text{その他} \end{cases} \tag{15}$$

と定義し、これが大きい部分空間から次々に併合し、二つのグループになったところで終了する。

仮定より各部分空間は d 個以上の点を含まなければならないが、場合によっては最終的に d 個未満の点のグループと残りと要素とに分離されることがある。これを防ぐために、併合の過程で d 個未満の要素のものがある限り、それらを優先して併合する。

7. ノイズレベルの推定

幾何学的 AIC の計算には誤差の標準偏差 ϵ が必要である。その推定には、誤差がなければデータ $\{\boldsymbol{p}_\alpha\}$ は n 次元空間の r $(= 2d)$ 次元部分空間にあることを利用する。$\{\boldsymbol{p}_\alpha\}$ に r 次元部分空間を最適に当てはめた残差を $\hat{J}_{\text{total}}$ とすると、次の形の ϵ^2 の不偏推定量が得られる。

$$\hat{\epsilon}^2 = \frac{\hat{J}_{\text{total}}}{(n-r)(N-r)} \tag{16}$$

これは $\hat{J}_{\text{total}}/\epsilon^2$ が自由度 $(n-r)(N-r)$ の χ^2 分布

[2] n 次元空間中に d 個の点を指定すればよい。各点は d 次元部分空間中を任意に動かしてよいから、実質的なパラメータ数は $nd - d^2$ である。

に従うことから導かれる[3]。残差 $\hat{J}_{\rm total}$ は全体のモーメント行列

$$\boldsymbol{M}_{\rm total} = \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{p}_\alpha \boldsymbol{p}_\alpha^\top \tag{17}$$

の固有値を大きい順に $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ とするとき、次のように計算される。

$$\hat{J}_{\rm total} = \sum_{k=r+1}^{n} \lambda_k \tag{18}$$

8. 最終的な再分類

以上の手順で部分空間を併合していくと、途中で誤って分類された点は最後まで残る。そこで最終的に得られた部分空間 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ に属するデータからアウトライアを除去し、再分類する。

原点に近い点は誤分類されやすいと考えられるので、まず $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ からそれぞれノルムの大きい半分を選ぶ (ただし d 個以上)。それらに部分空間 $\mathcal{L}'_1, \mathcal{L}'_2$ を最適に当てはめ、$\mathcal{L}_1$ 内で $\mathcal{L}'_2$ からの距離が大きい半分 (ただし d 個以上)、および $\mathcal{L}_2$ 内で $\mathcal{L}'_1$ からの距離が大きい半分 (ただし d 個以上) を選び、それぞれに再度部分空間 $\tilde{\mathcal{L}}_1, \tilde{\mathcal{L}}_2$ を当てはめる。そして各点 $\boldsymbol{p}_\alpha$ を $\tilde{\mathcal{L}}_1, \tilde{\mathcal{L}}_2$ のうちの距離の小さいほうに割り当てる。得られたそれぞれのクラスにさらに最小メジアン法 [11, 14] によって部分空間を当てはめて、各点を距離の小さいほうに割り当てる。

点 $\boldsymbol{p}$ の部分空間 $\mathcal{L}$ からの距離 $D(\boldsymbol{p}, \mathcal{L})$ は、式 (10) で計算した射影行列 $\boldsymbol{P}_d$ を用いて次のように表せる ($\boldsymbol{I}$ は単位行列)。

$$D(\boldsymbol{p}, \mathcal{L}) = \sqrt{(\boldsymbol{p}, (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_d)\boldsymbol{p})} \tag{19}$$

9. 精度の下界

どんな手法を用いても誤差のもとでは必ず真の解が得られるとは限らない。一様等方の正規分布に従う誤差モデルのもとでの理想的な分類は "最尤推定"、すなわち各点 $\boldsymbol{p}_\alpha$ を "真の" 部分空間 $\bar{\mathcal{L}}_1, \bar{\mathcal{L}}_2$ のうちの距離の小さいほうに割り当てることである。もちろん $\bar{\mathcal{L}}_1, \bar{\mathcal{L}}_2$ は未知であるから、実データに適用することはできない。しかし、真の解が既知のシミュレーションデータでは、これによる分類の誤り率を一つの下界として比較することにより、緒手法の性能の評価ができる。

10. 特異値分解による計算の高速化

5 節に述べた次元補正法を行うには計算過程で作用行列 $\boldsymbol{Q}$ を計算し直す必要がある。これは計量行列 $\boldsymbol{G}$ の非零の固有値に対する固有ベクトル $\{\boldsymbol{v}_i\}$ から定まるが、$\boldsymbol{G}$ は $(\boldsymbol{p}_\alpha, \boldsymbol{p}_\beta)$ を $(\alpha\beta)$ 要素とする $N \times N$ 行列であり、データ数 N が大きいと固有ベクトルの計算量が負担となる。これは次のように効率的に計算できる。データ $\{\boldsymbol{p}_\alpha\}$ を列ベクトルとする $n \times N$ **観測行列**

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_N \end{pmatrix} \tag{20}$$

を定義し、$\boldsymbol{W}^\top$ を次のように特異値分解する。

$$\boldsymbol{W}^\top = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^\top \tag{21}$$

ここに $\boldsymbol{U}$ は列が直交する $N \times n$ 行列、$\boldsymbol{\Sigma}$ は特異値を対角要素とする $n \times n$ 行列、$\boldsymbol{V}$ は $n \times n$ 直交行列である。$\boldsymbol{U}$ の第 i 列を $\boldsymbol{v}_i$ とすると作用行列 $\boldsymbol{Q}$ は式 (5) で与えられ、n にのみ依存する計算量で計算できる。

式 (10) の射影行列 $\boldsymbol{P}_d$ を計算するには式 (9) のモーメント行列 $\boldsymbol{M}$ の固有値 $\{\lambda_i\}$、固有ベクトル $\{\boldsymbol{u}_i\}$ が必要である。これも式 (20) の観測行列 $\boldsymbol{W}$ を式 (21) の形に特異値分解し、特異値 σ_i から固有値を $\lambda_i = \sigma_i^2$ と計算し、$\boldsymbol{V}$ の第 i 列を $\boldsymbol{u}_i$ とすればよい[4]。式 (17) の $\boldsymbol{M}_{\rm total}$ の固有値の計算についても同様である。

このような特異値分解による計算法は単なる数値計算の手段であり、幾何学的には部分空間の基底を計算しているにすぎない。特異値分解を解法の原理と考えてはならない[5]。

11. シミュレーション実験

図 1 は 2 次元平面上を独立に運動する 20 個の背景点と 9 個の物体点の動画像である。見やすくするために運動物体をワイヤーフレーム表示している。各画像上の特徴点の各々の座標に独立に期待値 0、標準偏差 ϵ の正規乱数誤差を加えたものをデータとし、物体と背景の分離を試みた。

図 2(a) に横軸を ϵ とし、 縦軸に貪欲法、次元補正を加えたもの、モデル選択を用いるもの、再分類を行うもの各々に対して、独立な 500 回の試行の平均誤り率をプロットした。各手法が精度の向上に役立っていることがわかる。

図 2(b) はすべての手法を組み合わせた部分空間分離法を貪欲法、市村の方法 [3]、および精度の下界と比較したものである。これを見ると、市村の方法は貪欲法に比べれば精度が向上しているものの、部分空間分離法には及ばないことがわかる。この理由は、

[3]誤差の自由度 (=モデルの余次元) は $n-r$ であり、モデルの自由度が $r(n-r)$ であるから、$\hat{J}_{\rm total}/\epsilon^2$ の自由度は $(n-r)N - r(n-r)$ となる [6]。

[4]数値的にもこのほうが安定していることが知られている。

[5]Tomasi-Kanade [15] の "因子分解法" も部分空間の基底を計算しているにすぎないが、命名の不適切さのため特異値分解が解法の原理と錯覚されることが多い [8]。

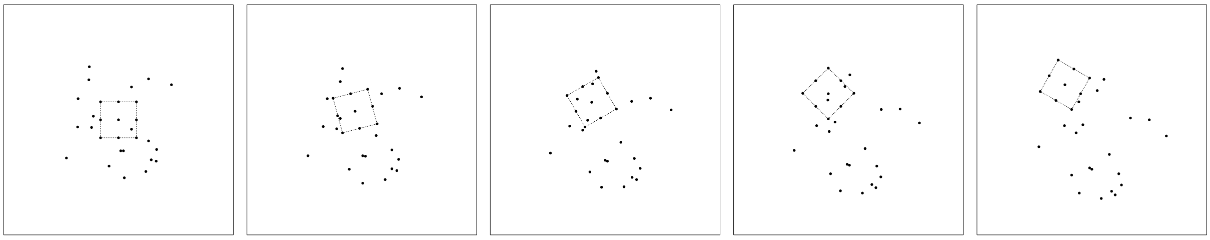

図 1:　2 次元平面上を運動する点。

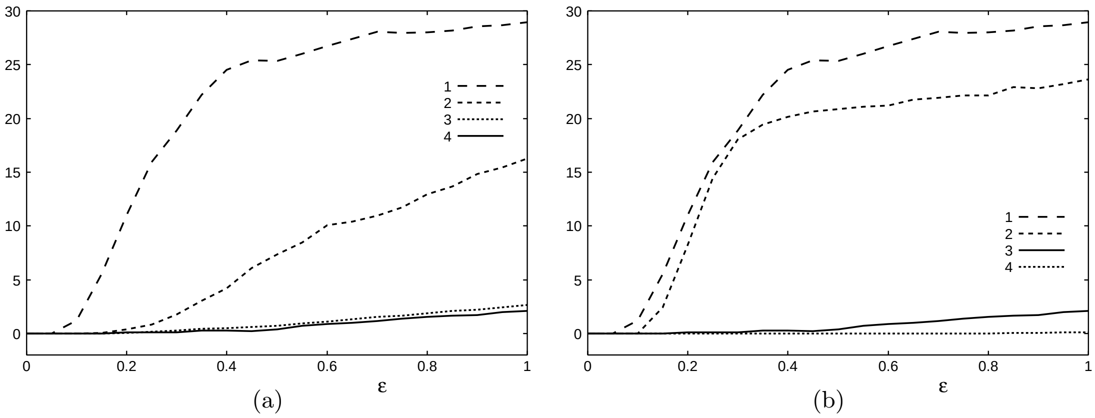

図 2:　2 次元運動の分離の誤り率。(a) 1. 貪欲法、2. 次元補正を加えたもの、3. モデル選択を用いるもの、4. 再分類を行うもの。(b) 1. 貪欲法、2. 市村の方法、3. 部分空間分離法、4. 下界。

大津の判別規準 [13] が最小二乗の意味で最適に判別するので、もともと非零の $|Q_{\alpha\beta}|$ も零に近いと零のクラスに分類されてしまうためである。

図 3 は 3 次元空間を独立に運動する 20 個の背景点と 14 個の物体点の物体点の動画像である。見やすくするために運動物体をワイヤーフレーム表示している。図 4 は図 2 と同様に評価した比較結果である。これに対しても 2 次元の場合と同様な結論が得られるが、市村の方法は貪欲法よりも劣る結果となった。

13. 実画像実験

図 5 の上段は背景と独立に移動する物体の実画像列である。下段に示した特徴点を手で選んで 3 次元運動の分離を行なうと、市村の方法では誤りが生じたが、貪欲法と部分空間分離法では正しく分離された。さらに各特徴点の画像座標に期待値 0、標準偏差 1, 2, 3, ... 画素の正規乱数の誤差を加えて各 10 回行ったところ、貪欲法ではもはや正しく分離されなかったが、部分空間分離法では最大 5 画素の誤差まですべて正しく分離された。

同じデータを 2 次元運動とみなして計算すると、部分空間分離法では正しく分離されたが、貪欲法および市村の方法では誤りが生じた。各特徴点の画像座標に誤差を加えて実験すると、提案手法では最大 3 画素の誤差まで正しく分離された。

14. まとめ

複数画像間の対応点を独立に移動する物体に分割・分離する Costeira-Kanade 法 [1] を Tomasi-Kanade [15] の「因子分解法」から切り離して「部分空間分離法」として数学的に定式化し、次元補正法、幾何学的 AIC によるモデル選択、最小メジアン法等の手法を導入してロバストなアルゴリズムを構成した。さらに精度の下界を導き、シミュレーション実験によってこれと比較して部分空間分離法の有効性を示した。最後に実画像に適用した例を示した。

本手法は Costeira-Kanade 法 [1] や Gear [2] の方法と異なり、経験的に調節すべきパラメータを何も含んでいない。今日の “知的処理” のパラメータ調節に過度に依存している現状に照らすと、これは大きな特徴である。

本論文では物体の個数は既知としたが、その自動判定法については今後の発表で述べる。また本論文では特徴点が追跡されていると仮定しているが、本手法をインタラクティブに適用して過去の追跡の誤りを検出したり、新しい追跡の検証を行うことも考えられる。

参考文献

[1] J. P. Costeira and T. Kanade, A multibody factorization method for independently moving objects, *Int. J. Comput. Vision*, **29**-3 (1998), 159–179.

[2] C. W. Gear, Multibody grouping from motion images, *Int. J. Comput. Vision*, **29**-2 (1998), 133–150.

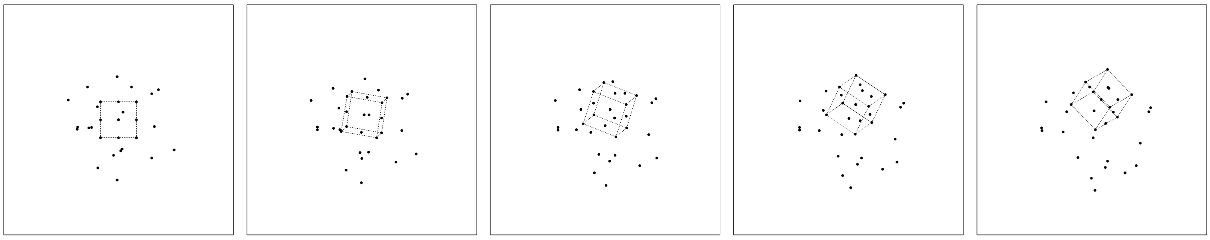

図 3:　3次元空間中を運動する点。

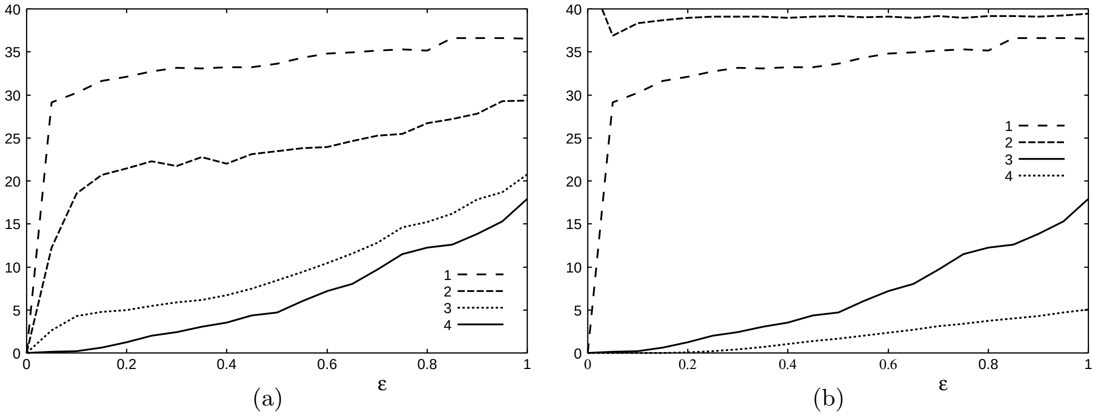

図 4:　3次元運動の分離の誤り率。(a) 1. 貪欲法、2. 次元補正を加えたもの、3. モデル選択を用いるもの、4. 再分類を行うもの。(b) 1. 貪欲法、2. 市村の方法、3. 部分空間分離法、4. 下界。

[3] 市村直幸, 形状空間への直交射影行列と判別基準を用いた複数運動の分割, 情報処理学会研究報告, 2000-CVIM-120-3 (2000-1), 17–24.

[4] 市村直幸, 富田文明, 形状行列からの特徴選択に基づく動きの分割, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J81-D-II**-12 (1998), 2757–2766.

[5] 金出武雄, コンラッド・ポールマン, 森田俊彦, 因子分解法による物体形状とカメラ運動の復元, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J76-D-II**-8 (1993), 1497–1505.

[6] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier, Amsterdam, 1996.

[7] 金谷健一, 情報量基準による幾何学的モデル選択, 情報処理学会論文誌, **37**-6 (1996), 1073 – 1080.

[8] 金谷健一, 因子分解を用いない因子分解法: 平行投影から透視変換へ, 電子情報通信学会技術研究報告, PRMU98-26, (1998-6), 1–8.

[9] 金谷健一, 因子分解を用いない因子分解法: 複数物体分離 電子情報通信学会技術研究報告, PRMU98-117 (1998-11), 37–44.

[10] 牧淳人, 渡邊睦, C. Wiles, Geotensity 拘束による3次元形状獲得, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J83-D-II**-8 (2000), 1714–1752.

[11] P. Meer, D. Mintz and A. Rosenfeld, Robust regression methods for computer vision: A review, *Int. J. Compute. Vision*, **6**-1 (1990), 59–70.

[12] 長崎健, 川嶋稔夫, 青木由直, 因子分解法に基づく運動画像列解析による多関節物体の構造推定, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J81-D-II**-3 (1998), 483–492.

[13] 大津展之, 判別および最小2乗規準に基づく自動しきい値選定法, 電子通信学会論文誌 D, **J63-D**-4 (1980), 349–356.

[14] P. J. Rousseeuw and A. M. Leroy, *Robust Regression and Outlier Detection*,] Wiley, New York, 1987.

[15] C. Tomasi and T. Kanade, Shape and motion from image streams under orthography—A factorization method, *Int. J. Comput. Vision*, **9**-2 (1992), 137–154.

付録: 定理1の証明

集合 $\mathcal{I}_i$ の要素数を N_i とする。$m = 2$ の場合を証明すれば十分である ($m > 2$ でも証明は同じ)。まず $\{\boldsymbol{p}_\alpha\}$ は "順序よく" 並んでいるとする。すなわち $\boldsymbol{p}_1$, ..., $\boldsymbol{p}_{N_1} \in \mathcal{L}_1$, $\boldsymbol{p}_{N_1+1}$, ..., $\boldsymbol{p}_N \in \mathcal{L}_2$ であるとする。部分空間 $\mathcal{L}_1$ の次元が r_1 であるから、$n \times N_1$ 行列 $\boldsymbol{W}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_{N_1} \end{pmatrix}$ のランクは r_1 である。ゆえにこの行列は $\mathcal{R}^{N_1}$ から $\mathcal{R}^n$ へのランク r_1 の写像を定義し、その零空間 $\mathcal{N}_1$ の次元は $\nu_1 = N_1 - r_1$ である。その零空間の任意の正規直交基底を $\{\boldsymbol{n}_1, ..., \boldsymbol{n}_{\nu_1}\}$ とする (各 $\boldsymbol{n}_i$ は N_1 次元ベクトル)。同様に $n \times N_2$ 行列 $\boldsymbol{W}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_{N_1} & \cdots & \boldsymbol{p}_N \end{pmatrix}$ は $\mathcal{R}^{N_2}$ から $\mathcal{R}^n$ へのランク r_2 の写像を定義し、それ零空間 $\mathcal{N}_2$ の次元は $\nu_2 = N - r_2$ である。その零空間の任意の正規直交基底を $\{\boldsymbol{n}'_1, ..., \boldsymbol{n}'_{\nu_2}\}$ とする (各 $\boldsymbol{n}_i$ は N_2 次元ベクトル)。

ベクトル $\{\boldsymbol{n}_i\}$, $\{\boldsymbol{n}'_i\}$ に0成分を付け加えて次の N 次元ベクトル $\{\tilde{\boldsymbol{n}}_i\}$, $i = 1,.., \nu_1$, $\{\tilde{\boldsymbol{n}}'_i\}$, $i = 1,.., \nu_2$ を作る。

$$\tilde{\boldsymbol{n}}_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{n}_i \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{n}}'_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{n}'_i \end{pmatrix} \tag{22}$$

この定義より $N - r$ 本のベクトル $\{\tilde{\boldsymbol{n}}_1, ..., \tilde{\boldsymbol{n}}_{\nu_1}, \tilde{\boldsymbol{n}}'_1, ..., \tilde{\boldsymbol{n}}'_{\nu_2}\}$ は $\mathcal{R}^N$ の正規直交系であり、すべて $n \times N$ 行列 $\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_N \end{pmatrix}$ の零空間 $\mathcal{N}$ に属している。行列 $\boldsymbol{W}$ のランクは仮定により $r_1 + r_2$ $(= r)$ であるからその零空間 $\mathcal{N}$ は次元 $\nu = N - r$ を持つ。したがって $\{\tilde{\boldsymbol{n}}_1, ..., \tilde{\boldsymbol{n}}_{\nu_1}, \tilde{\boldsymbol{n}}'_1, ..., \tilde{\boldsymbol{n}}'_{\nu_2}\}$ は零空間 $\mathcal{N}$ の正規直交基底である。

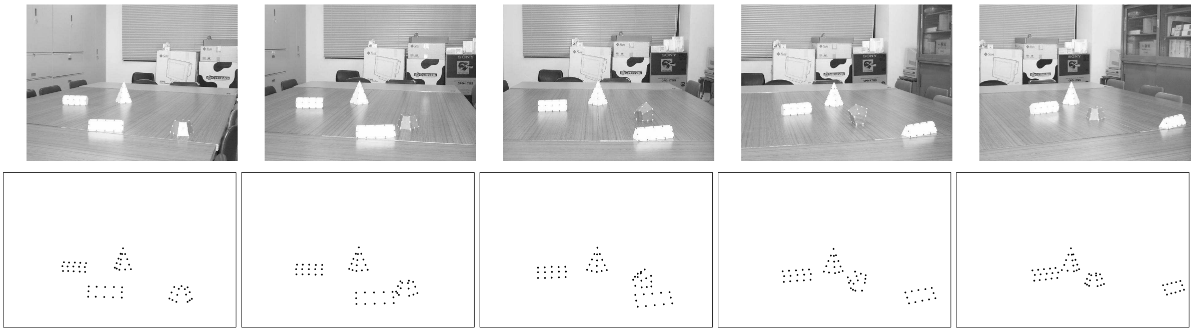

図 5: 背景と独立に移動する物体の実画像 (上) とその特徴点 (下)

式 (4) は $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{W}^\top \boldsymbol{W}$ を表しているから、$\{\tilde{\boldsymbol{n}}_1, ..., \tilde{\boldsymbol{n}}_{\nu_1}, \tilde{\boldsymbol{n}}'_1, ..., \tilde{\boldsymbol{n}}'_{\nu_2}\}$ は行列 $\boldsymbol{G}$ の固有値 0 に対する固有ベクトルの正規直交系である。行列 $\boldsymbol{G}$ の固有値 0 に対する固有ベクトルの正規直交系として別のもの $\{\boldsymbol{v}_{r+1}, ..., \boldsymbol{v}_N\}$ をとると、$\nu \times \nu$ 直交行列 $\boldsymbol{C}$ が存在して次の関係が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_{r+1} & \cdots & \boldsymbol{v}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{n}}_1 & \cdots & \tilde{\boldsymbol{n}}_{\nu_1} & \tilde{\boldsymbol{n}}'_1 & \cdots & \tilde{\boldsymbol{n}}'_{\nu_2} \end{pmatrix} \boldsymbol{C} \tag{23}$$

$N \times \nu$ 行列 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_{r+1} & \cdots & \boldsymbol{v}_N \end{pmatrix}$ の第 α, β 行の内積を $(\alpha\beta)$ 要素とする $N \times N$ 行列を考えると次のようになる。

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_{r+1} & \cdots & \boldsymbol{v}_N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_{r+1} & \cdots & \boldsymbol{v}_N \end{pmatrix}^\top \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{n}}_1 & \cdots & \tilde{\boldsymbol{n}}_{\nu_1} & \tilde{\boldsymbol{n}}'_1 & \cdots & \tilde{\boldsymbol{n}}'_{\nu_2} \end{pmatrix} \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^\top \\ &\quad \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{n}}_1 & \cdots & \tilde{\boldsymbol{n}}_{\nu_1} & \tilde{\boldsymbol{n}}'_1 & \cdots & \tilde{\boldsymbol{n}}'_{\nu_2} \end{pmatrix}^\top \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{n}}_1 & \cdots & \tilde{\boldsymbol{n}}_{\nu_1} \tilde{\boldsymbol{n}}'_1 & \cdots & \tilde{\boldsymbol{n}}'_{\nu_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{n}}_1 & \cdots & \tilde{\boldsymbol{n}}_{\nu_1} \tilde{\boldsymbol{n}}'_1 & \cdots & \tilde{\boldsymbol{n}}'_{\nu_2} \end{pmatrix}^\top \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{n}_1 \cdots \boldsymbol{n}_{\nu_1} & \boldsymbol{0} \cdots \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \cdots \boldsymbol{0} & \boldsymbol{n}'_1 \cdots \boldsymbol{n}'_{\nu_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{n}_1^\top & \boldsymbol{0}^\top \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{n}_{\nu_1}^\top & \boldsymbol{0}^\top \\ \boldsymbol{0}^\top & \boldsymbol{n}_1'^\top \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{0}^\top & \boldsymbol{n}_{\nu_2}'^\top \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \dagger \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{24}$$

ここに $(*)$, $(\dagger)$ はそれぞれ $N_1 \times N_1$, $N_2 \times N_2$ の部分行列である。これから $\boldsymbol{p}_\alpha$ と $\boldsymbol{p}_\beta$ が異なる部分空間に属せば行列 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_{r+1} & \cdots & \boldsymbol{v}_N \end{pmatrix}$ の第 α, β 行は直交することがわかる。行列 $\boldsymbol{G}$ の非零の固有値に対する固有ベクトルの任意の正規直交系を $\{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_r\}$ とし、これと $\{\boldsymbol{v}_{r+1}, ..., \boldsymbol{v}_N\}$ を合わせると行列 $\boldsymbol{G}$ のすべての固有値に対する固有ベクトルの正規直交系 $\{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_N\}$ が得られ、$N \times N$ 行列

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_r & \boldsymbol{v}_{r+1} & \cdots & \boldsymbol{v}_N \end{pmatrix} \tag{25}$$

は直交行列となる。したがって N 個の行は互いに直交する。ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ の第 α 要素を $v_{\alpha i}$ と書くと、行列 $\boldsymbol{V}$ の第 α 行は $(v_{\alpha 1}, ..., v_{\alpha N})$ であり、第 β 行は $(v_{\beta 1}, ..., v_{\beta N})$ である。ゆえに $\alpha \neq \beta$ のとき

$$\begin{aligned} &v_{\alpha 1}v_{\beta 1} + \cdots + v_{\alpha r}v_{\beta r} \\ &\qquad + v_{\alpha(r+1)}v_{\beta j(r+1)} + \cdots + v_{\alpha N}v_{\beta N} = 0 \end{aligned} \tag{26}$$

である。既に示したように $\boldsymbol{p}_\alpha$ と $\boldsymbol{p}_\beta$ が異なる部分空間に属せば $v_{\alpha(r+1)}v_{\beta(r+1)} + \cdots + v_{\alpha N}v_{\beta N} = 0$ である。ゆえに $\boldsymbol{p}_\alpha$ と $\boldsymbol{p}_\beta$ が異なる部分空間に属せば

$$v_{\alpha 1}v_{\beta 1} + \cdots + v_{\alpha r}v_{\beta r} = 0 \tag{27}$$

である。このことは $\boldsymbol{p}_\alpha$ と $\boldsymbol{p}_\beta$ が異なる部分空間に属せば $N \times r$ 行列

$$\boldsymbol{V}_r = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_r \end{pmatrix} \tag{28}$$

の第 α, β 行が直交することを意味する。行列 $\boldsymbol{V}_r$ の第 α, β 行の内積を $(\alpha\beta)$ 要素とする $N \times N$ 行列は

$$\boldsymbol{V}_r\boldsymbol{V}_r^\top = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_r \end{pmatrix}^\top = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i^\top = \boldsymbol{Q} \tag{29}$$

である。ゆえに $\boldsymbol{p}_\alpha$ と $\boldsymbol{p}_\beta$ が異なる部分空間に属せば作用行列 $\boldsymbol{Q}$ の第 $(\alpha\beta)$ 要素は 0 となる。

以上では $\boldsymbol{p}_1, ..., \boldsymbol{p}_{N_1} \in \mathcal{L}_1, \boldsymbol{p}_{N_1+1}, ..., \boldsymbol{p}_N \in \mathcal{L}_2$ と仮定したが、$\boldsymbol{p}_1, ..., \boldsymbol{p}_N$ を任意に置換しても結論は同じである。なぜなら、$\boldsymbol{p}_\alpha$ と $\boldsymbol{p}_\beta$ を交換すると行列 $\boldsymbol{G}$ の第 α, β 行が、そして第 α, β 列がそれぞれ交換される。その結果 α 番目と β 番目の固有ベクトルが入れ替るので、行列 $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_r \end{pmatrix}$ の第 α, β 行が入れ替る。したがって、作用行列 $\boldsymbol{Q}$ の第 α, β 行および第 α, β 列がそれぞれ入れ替る。$\boldsymbol{p}_1, ..., \boldsymbol{p}_N$ の任意の置換は交換の組み合わせで得られるから、任意の置換で定理が成立する。二つ以上の部分空間がある場合も同様に証明できる。 □