

研究ノート

ファブリックテンソルによる構造異方性の特徴づけと統計的検定

(Characterization of Structural Anisotropy by Fabric Tensors)
and Their Statistical Test

金 谷 健 一* (Ken-ichi Kanatani)

キーワード：異方性／土の構造／統計的解析 (IGC)
：D6/D0)

1. はじめに

土を剛体粒子の集合と考え、その充てん構造、接触状態、粒子間すべりなどの微視的考察とその実験観察を行うことによって土の巨視的な力学特性を説明しようとする研究が近年、精力的に行われている^{1,2)}。特に、巨視的応力と微視的接触力、微視的すべりと巨視的ひずみの関係は理論的に導かれている³⁻⁵⁾。それによれば、 n (単位ベクトル) 方向にある微小立体角 $d\Omega(n)$ の中にある接触方向をもつ接触点数を総粒子数で割ったものを $D(n)$ $d\Omega(n)$ 、そのような接触点での接触力が平均 $f_i(n)D(n)$ $d\Omega(n)$ であるように「接触点密度」 $D(n)$ 、「平均接触力」 $f_i(n)$ を定義すれば、巨視的応力 σ_{ij} が

$$\sigma_{ij} = \frac{3\gamma}{4\pi a^2} \int n_i f_j(n) D(n) d\Omega(n) \quad (1)$$

で与えられる。ただし a は粒子の平均半径、 γ は充てん率であり、 $()$ は指標の対称化を表す。積分は全立体角にわたって行う。これは3次元の場合であるが、2次元粒子の場合、すなわち円板や円柱等で実験する場合には次のようになる。

$$\sigma_{ij} = \frac{\gamma}{\pi a} \int n_i f_j(n) D(n) d\Omega(n) \quad (2)$$

ただし $d\Omega(n)$ は微小角であり、積分は単位円周上にわたって行う。(1),(2)式は微視的接触力のする仮想仕事の総和が巨視的応力のする仮想仕事に等しくなければならないという「仮想仕事の原理」によって簡単に導ける³⁻⁵⁾。ここでもし接触力が、ある2階のテンソルと接触方向 n との積で表せると仮定できれば(1),(2)式は $f_i(n)$ について解くことができ、それぞれ次のようになる。

$$f_i(n)D(n) = \frac{a^2}{\gamma} \sigma_{ij} n_j \quad (3)$$

$$f_i(n)D(n) = \frac{a}{\gamma} \sigma_{ij} n_j \quad (4)$$

一方、微視的すべりを総和したものが巨視的すべりであるという関係を用いれば、 n 方向の平均すべり量を $\xi_i(n)$ とすると、巨視的ひずみ e_{ij} は次のようになる³⁻⁵⁾。

$$e_{ij} = \frac{3}{4\pi a} \int n_i \xi_j(n) d\Omega(n) - \frac{4\gamma}{3\tau} \delta_{ij} \quad (5)$$

δ_{ij} は Kronecker のデルタである。右辺第1項は接触点があるまますべった場合の寄与であり、第2項は接触点が生消滅し、平均接触点数 (配位数) が、従って充てん率が変化する分の補正、すなわちダイレイタンスーの効果である。2次元の場合は次のようになる。

$$e_{ij} = \frac{1}{\pi a} \int n_i \xi_j(n) d\Omega(n) - \frac{4\gamma}{2\tau} \delta_{ij} \quad (6)$$

以上より、巨視的応力 σ_{ij} が与えられたなら(3),(4)式により接触力が推定できる。このとき接触点のすべり量と接触点の生消滅、すなわちダイレイタンスーがわかれば(5),(6)式により、巨視的ひずみ e_{ij} がわかるはずである。しかし、その肝心な部分は理論的に導くことが困難である。(1)~(6)式はすべて、同じ力学の対象を微視的にみた場合と巨視的にみた場合とを等置することから得られており、本質的に幾何学的関係である。しかし、すべりやダイレイタンスーの機構は多粒子相互作用による複雑な力学過程であり、理論化が難しい。よく検討してみれば、理論的に得られるのは(1)~(6)式に限られるといっても過言ではないと思われる。例えば佐武は「第2テンソル」という概念を用いて充てん構造を表すテンソル (ファブリックテンソル) を含んだ接触力と関係を論じているが⁶⁾、これは離散有限個の接触点に対するもので、無限個の極限をとり、その際、極限のとり方と接触点密度 $D(n)$ とを注意深く考慮すると^{7,8)}、(3),(4)式と等価になることが確かめられる。またダイレイタンスーの効果 $\Delta\gamma$ を Rowe の流儀で散逸エネルギーから求めようとする試みもあるが⁹⁾、これも困難と思われる。なぜなら、配位数と充てん率と

* 群馬大学工学部情報工学科 助教授 (桐生市天神町 1-5-1)
(1983. 2. 25 原稿受付・封鎖期限 1984. 10. 1)

は関数関係にあるから¹⁰⁾、接触点数の生成消滅による変化を求めるには充てん率の変化、すなわちダイレイタンスによる体積変化がわかればよい。(粒子は体積一定の剛体と考えているから。) さて、応力が与えられたとき、すべりによるせん断変形¹¹⁾とダイレイタンスによる体積変化とが進行したときの散逸エネルギーは粒子間のすべりによって失われる散逸エネルギーの総和に等しい。したがって、粒子間すべりの散逸エネルギーがわかれば「応力比-ダイレイタンス関係式」が得られ、これからダイレイタンスの量が定まる。ところが、粒子間のすべりの散逸エネルギーを算定するには粒子接触点の生成消滅を知らなければならない。これではまた出発点に戻ってしまい、議論が堂々めぐりになる。結局、散逸エネルギーを用いるためには充てん構造の変化に関する何らかのモデルが必要であり、Rowe¹²⁾は規則充てんのモデルを用いている。要するに、多体相互作用をどうモデル化するかという本質的な問題を避けては、どんなに式を組み合わせても解決できるものではないと思われる。

以上のことからわかるように、粒子集合体の強度、すべり、降服、破壊、等は実験事実に基づいた適切なモデル化によって初めて把握できると考えられる。このとき単に充てんのみならず、その充てん構造が重要な役割を果たす。実際、同じ充てん率でも充てん構造が異なれば強度も異なることが知られており、粒子集合体の強度と、その充てん構造を表すものとしての粒子間接触方向の分布との関係が小田や小西らによってよく観察されている^{13,14)}。ところが、その分布は図表によってデータが与えられているのみで、それからは大略の傾向を定性的に把握することしかなされていないのが現状である。本論文で以下考えるのは次の2点である。(I)接触方向分布は方向性をもつデータの分布である。方向性をもたない場合(例えば粒径分布、粒子質量分布など)ではその分布を特徴づけるものとして代表的なものが平均および分散である。しかし、方向性をもつデータでは単純に平均すると反対向きデータの打ち消し合いが生じるし、分散というのも考えにくい。そこで、何が分布を特徴づけるのかを考える。その場合、座標系は任意に選んだものであるから、座標系によらない形のものでなければならない。すなわちテンソルでなければならない。また、試料が完全に等方性であれば、分布は理想的には一様分布になるはずであるから、分散に相当するテンソルは、「一様分布からのずれ」を表すべきであり、構造の異方性を特徴づけるべきものである。それはどのように定義すべきか。これらのことを十分一般的に、しかも厳密に数学的に定式化する。(II)データの個数は常に有限であるから統計的なばらつきが避けられない。例えば、仮に完全に等方性であっても有限個のデータを観測したの

では必ずしも一様分布が得られるとは限らない。したがって、ほぼ一様分布が得られれば、これは等方性と結論し、データの不規則なばらつきを統計的誤差とみなしても差しつかえないが、それではどの程度のばらつきは誤差とみなせ、どの程度ならみなせないのであろうか。これを定量的に厳密に調べるために統計理論による“分布の適合度検定”を導入し、小西、小田らのデータに実際に適用して、その解析の具体的手順を示す。

2. データの分布とファブリックテンソル

いま N 個の方向を表すデータ $n^{(1)}, n^{(2)}, \dots, n^{(N)}$ が得られたとする。(各々単位ベクトルとする。) 一応、粒子間接触方向を想定するが、実際はほかの場合、例えば繊維強化複合材料内の繊維分布でも、岩盤中のクラック面の法線方向などでも以下の議論は同じである。ただし、単位ベクトル n とその反対向き $-n$ とは同じ方向性を表すと約束しておく。このため、はじめからデータは必ず n と $-n$ との対から成っていることにする。

これらのデータを整理するのに最初に思いつくのは、

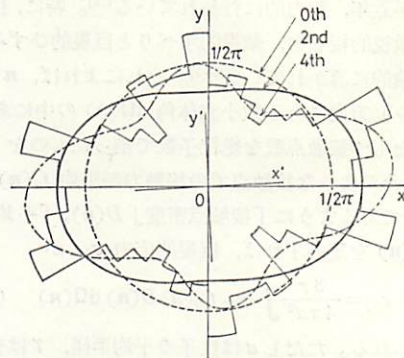


図-1 2次元粒子間接触方向の分布(荷重前)

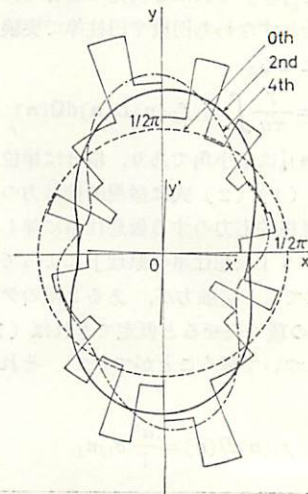


図-2 2次元粒子間接触方向の分布(荷重後)

データを方向ごとに分類してヒストグラムを作ることであろう。しかし、残念なことに2次元の場合しか図示することができない。2次元であれば図-1、図-2のようなグラフができる。(「円形ヒストグラム」、「ローズダイヤグラム」などよばれている。)しかし、図示できたとしても、通常は実験的なばらつきがあり、単に大ざっぱな傾向しか把握できない。しかも、これは角度を分類するときの区間幅の選び方によって大きく変わってしまう恐れもある。したがって、2次元でも3次元でも適用できる何らかの定量的な指標、たとえば平均、分散のようなものを得ることが望ましい。しかし、単に平均をとって $\sum_{\alpha=1}^N n_i^{(\alpha)}/N$ を計算すると、反対方向のデータと打ち消し合って0となってしまう。そこで考えられるのは、偶数個の積の平均、

$$\sum_{\alpha=1}^N n_i^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)}/N, \sum_{\alpha=1}^N n_i^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} n_k^{(\alpha)} n_l^{(\alpha)}/N, \dots$$

を計算することであろう。これらはテンソル量である。そこで

$$N_{i_1 \dots i_n} = \langle n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_n} \rangle \quad (7)$$

とおこう。ただし $\langle \rangle$ はデータの平均 $\sum_{\alpha=1}^N /N$ を表すものとする。これを「モーメントテンソル」または「第1種のファブリックテンソル」とよぶことにする。

確かにこれは座標系の選び方によらない不変な意味をもつテンソルであるが、しかし、これではこのテンソルが具体的に何を表しているのかが理解しにくい。実はこのテンソルはデータの分布を完全に特徴づけるのであるが、これを理解するには、このテンソルとデータの「分布関数」との関係性を明らかにする必要がある。そこで「実験的分布関数」を

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \delta(n - n^{(\alpha)}) \quad (8)$$

で定義する。ここに、3次元の場合は $\delta(n - n^{(\alpha)}) = \delta(\theta - \theta^{(\alpha)}) (\phi - \phi^{(\alpha)}) / \sin \theta^{(\alpha)}$ であり $\delta(\cdot)$ は Dirac のデルタ関数である。 θ, ϕ は球面座標を表す。2次元の場合には $\delta(n - n^{(\alpha)}) = \delta(\theta - \theta^{(\alpha)})$ であり θ は極座標である。要するに、データの存在する方向にのみ無限のインパルスをもつような特異な関数である。しかし、これを用いると

$$\left. \begin{aligned} \int f(n) d\Omega(n) &= 1 \\ \int n_{i_1} \dots n_{i_n} f(n) d\Omega(n) &= \langle n_{i_1} \dots n_{i_n} \rangle \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

となっている。以上のことより、データの平均 $\langle \rangle = \sum_{\alpha=1}^N /N$ を計算することは分布 $f(n)$ に関する期待値を計算することに等しく、 $N_{i_1 \dots i_n}$ は $f(n)$ の n 次のモーメントであることがわかる。

定義より $f(n)$ は得られたデータ方向のインパルスのみから成る特異な関数であるから、これを何らかの方法

で滑らかにならしたものが真の分布と考えられる。通常のスカラーのデータの場合によく行われるのは滑らかな曲線、あるいは直線と最小二乗法によって当てはめることである。そこでこの場合にも同様に考え、滑らかな関数として n_i の多項式

$$F(n) = C + C_i n_i + C_{ij} n_i n_j + C_{ijk} n_i n_j n_k + \dots \quad (10)$$

を考える。(指標に関する総和規約を用いる。)そして係数 $C, C_i, C_{ij}, C_{ijk}, \dots$ を

$$\int [F(n) - f(n)]^2 d\Omega(n) \rightarrow \min. \quad (11)$$

によって定めることにしよう。ここで、よく考えてみると、これでは $C, C_i, C_{ij}, C_{ijk}, \dots$ を一意的に定めることができないことにすぐ気がつく。まず、仮定により $f(n) = f(-n)$ だから n_i の奇数次の項は現れないことがわかる。しかし、残った $1, n_i n_j, n_i n_j n_k n_l, \dots$ は方向の関数、すなわち単位球面上あるいは円周上の関数として線形独立ではない。なぜなら $n_i n_j n_k n_l$ で $k=l$ の縮約を行うと $n_i n_j$ になり、更に $i=j$ の縮約を行うと1になってしまうからである。すなわち、 $n_{i_1} \dots n_{i_n}$ の張る空間を V_n (すなわち、いろいろな $i_1 \dots i_n$ に対する $n_{i_1} \dots n_{i_n}$ の線形結合の全体) とすると、 $V_0 \subset V_2 \subset V_4 \subset \dots$ となっているのである。したがって、もし n 次の項までの近似を行おうと思えば $n_{i_1} \dots n_{i_n}$ の項のみで十分であり、 $1, n_i n_j, \dots, n_{i_1} \dots n_{i_{n-2}}$ は必要でない。言い換えれば始めから、例えば3次元の場合では

$$F(n) = \frac{1}{4\pi} F_{i_1 \dots i_n} n_{i_1} \dots n_{i_n} \quad (12)$$

とおいても全く一般性を失わない。この係数 $F_{i_1 \dots i_n}$ を「第2種のファブリックテンソル」とよぶことにする。具体的に最小二乗法によって定めると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} F &= 1 \\ F_{ij} &= \frac{15}{2} \left[N_{ij} - \frac{1}{5} \delta_{ij} \right] \\ F_{ijkl} &= \frac{315}{8} \left[N_{ijkl} - \frac{2}{3} \delta_{(ij} N_{kl)} + \frac{1}{21} \delta_{(ij} \delta_{kl)} \right] \\ F_{ijklmn} &= \frac{3003}{16} \left[N_{ijklmn} - \frac{15}{13} \delta_{(ij} N_{klmn)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{45}{143} \delta_{(ij} \delta_{kl} N_{mn)} - \frac{5}{429} \delta_{(ij} \delta_{kl} \delta_{mn)} \right] \\ &\dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

結局これらはすべてモーメントテンソル $N_{i_1 \dots i_n}$ の線形結合で表される。すなわち、モーメントテンソルは分布を完全に特徴づけるのである。(具体的な計算方法および一般式は金谷¹⁹⁾を参照。)2次元の場合には

$$F(n) = \frac{1}{2\pi} F_{i_1 \dots i_n} n_{i_1} \dots n_{i_n} \quad (14)$$

とおくと次のようになる。(詳細はやはり金谷¹⁹⁾参照。)

$$\left. \begin{aligned}
 F=1 \\
 F_{ij}=4 \left[N_{ij} - \frac{1}{4} \delta_{ij} \right] \\
 F_{ijkl}=16 \left[N_{ijkl} - \frac{3}{4} \delta_{(ij)N_{kl}} + \frac{1}{16} \delta_{(ij)\delta_{kl}} \right] \\
 F_{ijklmn}=64 \left[N_{ijklmn} - \frac{5}{4} \delta_{(ij)N_{klmn}} \right. \\
 \left. + \frac{3}{8} \delta_{(ij)\delta_{kl}N_{mn}} - \frac{1}{64} \delta_{(ij)\delta_{kl}\delta_{mn}} \right] \\
 \dots\dots\dots
 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

3. 第3種ファブリックテンソル

以上でモーメントテンソル $N_{i_1 \dots i_n}$ から作った $F_{i_1 \dots i_n}$ が分布関数の形を定めることがわかったが、ひとつ不十分な点がある。それは(13),(15)式からもわかるように、何次までの近似をとるかによって $F_{i_1 \dots i_n}$ を別々に計算しなければならないことである。したがって、例えば、ある分布には2次の近似を行い、別の分布には4次の近似を行うと $F_{i_1 \dots i_n}$ の階数が異なるから比較の仕様がなない。それより望ましいのは次のようにすることである。まず第0近似として等方性(一様分布)を仮定する。次に第2次近似として、“等方性からのずれ”を表す部分を追加する。更に4次近似では“2次の近似からのずれ”の部分を追加する……という具合に「展開」することであろう。このことは球面または円周上の関数の空間 $V_0 \subset V_2 \subset V_4 \subset \dots$ を次のような意味で「Schmidtの直交化」を施すことに相当する¹⁵⁾。まず $W_0 = V_0$ とする。次に V_2 での V_0 の「直交補空間」を W_2 とする。すると $V_2 = W_2 \oplus W_0$ と「直和解」される。更に V_4 での V_2 の直交補空間を W_4 とする。これを続けてゆけば

$$V_n = W_n \oplus W_{n-2} \oplus \dots \oplus W_2 \oplus W_0. \quad (16)$$

と直和解され、各部分空間は互いに直交している。ただし「直交性」は「内積」 $(\cdot, \cdot) = \int (\cdot)(\cdot) d\Omega(n)$ によって定義するものとする。そこで(16)式の各部分空間から基底を選んで $f(n)$ を展開してゆけばよいが、このことはちょうど次のような形に展開することに等しい¹⁵⁾。すなわち、3次元では

$$\begin{aligned}
 f(n) = \frac{1}{4\pi} [D + D_{ij}n_i n_j \\
 + D_{ijkl}n_i n_j n_k n_l + \dots] \quad (17)
 \end{aligned}$$

であり、2次元では

$$\begin{aligned}
 f(n) = \frac{1}{2\pi} [D + D_{ij}n_i n_j \\
 + D_{ijkl}n_i n_j n_k n_l + \dots] \quad (18)
 \end{aligned}$$

である。ここで $\{ \}$ は「偏差部分」を表す(付録参照)。

さて、(17)の形の展開形を用いると、その展開係数は

$$D_{i_1 \dots i_n} = \frac{2n+1}{2^n} \binom{2n}{n} N_{(i_1 \dots i_n)} \quad (19)$$

となる¹⁵⁾。これは偏差テンソルであるから(17)式は

$$\begin{aligned}
 f(n) = \frac{1}{4\pi} [D + D_{ij}n_i n_j \\
 + D_{ijkl}n_i n_j n_k n_l + \dots] \quad (20)
 \end{aligned}$$

と書いてもよい。 $D_{i_1 \dots i_n}$ を「第3種ファブリックテンソル」とよぶことにする。 $N_{kkk}=1$, $N_{ijkl}=N_{ij}$, $N_{ijklmn}=N_{ijkl}$ 等により(19)式は具体的には

$$\left. \begin{aligned}
 D=1 \\
 D_{ij} = \frac{15}{2} \left[N_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right] \\
 D_{ijkl} = \frac{315}{8} \left[N_{ijkl} - \frac{6}{7} \delta_{(ij)N_{kl}} + \frac{3}{35} \delta_{(ij)\delta_{kl}} \right] \\
 D_{ijklmn} = \frac{3003}{16} \left[N_{ijklmn} - \frac{15}{11} \delta_{(ij)N_{klmn}} \right. \\
 \left. + \frac{5}{11} \delta_{(ij)\delta_{kl}N_{mn}} - \frac{5}{231} \delta_{(ij)\delta_{kl}\delta_{mn}} \right] \\
 \dots\dots\dots
 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

となる。 D は常に1であり、これは後にいくつ項を加えてもかわらない。それは、残りの項が“1と直交している”ためである。このため $\int f(n) d\Omega(n) = 1$ (規格化)は常に成立している。このように、後にいくつ項を加えても前の項は影響されないということが直和解に基づく展開の特徴である。 $D=1$ は等方性の部分であり、 D_{ij} がそれからのずれを表しており、直交異方性を示す項である^{16,17)}。その主軸がその直交異方性の軸を表して D_{ijkl} が更にそれからのずれを表している。2次元の場合の(19)式に相当するのは

$$D_{i_1 \dots i_n} = 2^n N_{(i_1 \dots i_n)} \quad (22)$$

である。これもやはり偏差テンソルであるから(18)式は

$$\begin{aligned}
 f(n) = \frac{1}{2\pi} [D + D_{ij}n_i n_j \\
 + D_{ijkl}n_i n_j n_k n_l + \dots] \quad (23)
 \end{aligned}$$

と書いてもよい。そして、 $D_{i_1 \dots i_n}$ の具体的な形は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned}
 D=1 \\
 D_{ij} = 4 \left[N_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \right] \\
 D_{ijkl} = 16 \left[N_{ijkl} - \delta_{(ij)N_{kl}} + \frac{1}{8} \delta_{(ij)\delta_{kl}} \right] \\
 D_{ijklmn} = 64 \left[N_{ijklmn} - \frac{3}{2} \delta_{(ij)N_{klmn}} \right. \\
 \left. + \frac{9}{16} \delta_{(ij)\delta_{kl}N_{mn}} - \frac{1}{32} \delta_{(ij)\delta_{kl}\delta_{mn}} \right] \\
 \dots\dots\dots
 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

実は(16)式の分解は、球面あるいは円周上の関数空間上の「回転群の既約表現」の基底を与えていることがわかる¹⁵⁾。したがって、各 W_l は3次元の場合は $2l+1$ 次元であり、その元 $n_{\{l_1 \dots l_l\}}$ は l 次の「球面調和関数」である。それらは「Laplace-Beltrami 作用素」 $A = (1/\sin\theta)(\partial/\partial\theta)\sin\theta \partial/\partial\theta + (1/\sin^2\theta)\partial^2/\partial\phi^2$ の固有値 $-l(l+1)$ の固有関数である。量子力学では $-\hbar^2 A$ がちょうど「軌道角運動量作用素」になっており、 l が「方向量子数」である。 W_l の $n_{\{l_1 \dots l_l\}}$ の形の元は互いに直交していないが、これを直交化したものが「Laplace の球面調和関数」 $Y_{lm}(\theta, \phi)$, $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$, であり、 m が「磁気量子数」に対応している。また(17)式の展開の形は電磁気学の「多重極子モーメント展開」と同じものである。(詳細は金谷¹⁵⁾参照。) 同じ論法で2次元の場合の(18)式の展開は実は Fourier 級数と同じことであることがわかる。これは直接に確かめるのも容易である。例えば $n_{\{1n_j\}} = n_1 n_j - \delta_{1j}/2$ であるから $n_{\{11n_1\}} = n_1^2 - 1/2 = \cos^2\theta - 1/2 = (1/2)\cos 2\theta$, $n_{\{11n_2\}} = n_1 n_2 = \cos\theta \sin\theta = (1/2)\sin 2\theta$ となっている。そして、 $D_{1_1 \dots 1_n}$ は実は独立な成分は2つのみであり、例えば $D_{1_1 \dots 1_n} = a_n$, $D_{1_1 \dots 1_2} = b_n$ とおくと、(18)式の展開は

$$f(n) = \frac{1}{2\pi} [1 + a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta + a_4 \cos 4\theta + b_4 \sin 4\theta + \dots] \quad (25)$$

にはかならない。ただし、初めからこのように表したのでは何がどういうテンソルかわからなくなる。例えば (a_2, b_2) はベクトルのように見えるがそうではない。

$$D_{1_1 j} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & -a_2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

がテンソルを形成するのである。同様に a_4, b_4 は4階のテンソル $D_{1_1 j k l}$ の要素である。

4. 分布の適合度検定

(19), (22) 式によれば任意の階数の $D_{1_1 \dots 1_n}$ を計算することができる。そして(17), (18)式の展開は任意の項まで限りなく計算できる。しかし、これを続けてゆけば、結局データのみの方向にインパルスをもつ $f(n)$ に収束してしまう。滑らかな真の分布を推定しようとするれば適当な項で打ち切らなければならない。どこで打ち切るかを定めるために、得られた分布がデータにどの程度適合しているかを統計的に検定する必要がある。まず最初に「一様性の検定」を考えよう。もしデータがほぼ一様分布であれば、計算された一様分布からのずれを表す $D_{1_1 j}$ は小さいはずである。どの程度小さければ、これを統計的ばらつきによる誤差とみなしてよいかを知るためには次の「統計量」を計算すればよい¹⁵⁾。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{2}{15} N D_{1_1 j} D_{1_1 j} \quad (3 \text{次元}) \\ & \frac{1}{4} N D_{1_1 j} D_{1_1 j} \quad (2 \text{次元}) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

ただし N はデータの個数(真の観測数であり、 n と $-n$ とは同じデータとして扱う)である。2次元の場合は、前節に示した Fourier 係数を用いて $N(a_2^2 + b_2^2)/2$ と表すこともできる。3次元の場合、もしこれが $\chi_c^2(5, \alpha)$ より大きければ、「信頼水準」 α で等方性とみなすことができない。ただし $\chi_c^2(5, \alpha)$ は自由度5の χ^2 分布において、それより大きい値の出る確率(「上側確率」)が α となる値である。(統計学の書物には必ず表が掲載されている。) 2次元の場合には $\chi_c^2(2, \alpha)$ を用いる。

(27)式は次のような考え方によって導かれている¹⁵⁾。まず得られたデータが一様分布から得られる確率(正確には「尤度」)を考える。次に同じデータが $D_{1_1 j}$ まで考慮した分布から得られる尤度を考える。もし両者の比(「尤度比」)が小さければ、これは一様分布がよく適合しているとは考えられない。ところで、この尤度比を λ とおくと、データ数 N が十分大きいと $-2\log \lambda$ が漸近的に χ^2 分布に従い、その自由度は独立なパラメータの個数に等しいことがわかっている。これが「尤度比検定」の考え方である。もっとも厳密には、この結果は「最尤推定法」で $D_{1_1 j}$ を推定した場合に当てはまるのであるが、 N が十分大きければ「最小二乗法」でも大差はなくなる。ところで、 N が十分大きいとき、 $-2\log \lambda$ は「Fisher 情報行列」を係数とするパラメータの2次形式で表されることが知られている。(27)式はこの Fisher 情報行列を計算することによって求めたものである。

次に、一様分布とは考えられないときに、 $D_{1_1 j}$ の項のみでよいか、あるいは $D_{1_1 j k l}$ の項まで考慮しなければならないかを調べる必要がある。これも同様に、得られたデータが $D_{1_1 j}$ を考慮した分布から得られる尤度と $D_{1_1 j k l}$ まで考慮した分布から得られる尤度との比を調べればよく、これも Fisher 情報行列を計算することによって求まる。ただし形が複雑となる。もし $D_{1_1 j}$ が1に比べて小さいときは次のようになる¹⁵⁾。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{315} N \left[D_{1_1 j k l} D_{1_1 j k l} - \frac{8}{11} D_{1_1 j k l} D_{1_1 j k m} D_{1_1 l m} \right] \quad (3 \text{次元}) \\ & \frac{1}{16} N D_{1_1 j k l} D_{1_1 j k l} \quad (2 \text{次元}) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

2次元の場合を Fourier 係数で表すと、やはり $N(a_4^2 + b_4^2)/2$ となる。これらの統計量を $\chi_c^2(9, \alpha)$ (3次元)、 $\chi_c^2(2, \alpha)$ に対して検定すればよい。

5. 例題とまとめ

本文中で述べた手法を例題によって示してみよう。図-1、

図-2 は小西, 小田らの観測した 橋立柱集合の接点分布であり, 図-1 が荷重前, 図-2 が荷重後である¹⁴⁾。(荷重は y 軸方向の圧縮である。) この結果を定量的に解析してみよう。まず図-1 について考える。4 階までの「モーメントテンソル」は次のようになる。

$$N_{ij} = \begin{bmatrix} 0.5605 & 0.005328 \\ 0.005328 & 0.4395 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} N_{1111} &= 0.4483, & N_{1112} &= 0.01029 \\ N_{1122} &= 0.1122, & N_{1222} &= -0.004965 \\ N_{2222} &= 0.3273 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

これから「第 2 種ファブリックテンソル」を計算すると次のようになる。

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} 1.242 & 0.02131 \\ 0.02131 & 0.7579 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} F_{1111} &= 1.447, & F_{1112} &= 0.1327 \\ F_{1122} &= 0.1282, & F_{1222} &= -0.1114 \\ F_{2222} &= 0.9631 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

このことは分布が次のように近似できることを意味する。

$$f(\mathbf{n}) \sim \frac{1}{2\pi} \quad (0 \text{ 次近似}) \quad (33)$$

$$f(\mathbf{n}) \sim \frac{1}{2\pi} [1.242x^2 + 0.04262xy + 0.7579y^2] \quad (2 \text{ 次近似}) \quad (34)$$

$$f(\mathbf{n}) \sim \frac{1}{2\pi} [1.447x^4 + 0.5308x^3y + 0.7692x^2y^2 - 0.4456xy^3 + 0.9631y^4] \quad (4 \text{ 次近似}) \quad (35)$$

これらを図示したものが図-1 に重ねて書き込んである。本文で述べたように, 近似の次数ごとに分布の近似形が変わって不便である。そこで「第 3 種のファブリックテンソル」を計算すると次のようになる。

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} 0.2421 & 0.02131 \\ 0.02131 & -0.2421 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{1111} &= 0.2052, & D_{1112} &= 0.1221 \\ D_{1122} &= -0.2052, & D_{1222} &= -0.1221 \\ D_{2222} &= 0.2052 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

このことは分布形が次のように展開できることを意味する。

$$f(\mathbf{n}) = \frac{1}{2\pi} [1 + 0.2421(x^2 - y^2) + 0.04262xy + 0.2052(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + 0.4884(x^3y - xy^3) + \dots] \quad (38)$$

ここにおいて 0 次, 2 次, 4 次の項で打ち切ったものがそれぞれ (33), (34), (35) 式である。このことから, $D_{i_1 \dots i_n}$ が「それ以前の項では表されない部分を次々と追加するもの」であるということが了解できるであろう。(38) 式で x, y のかわりに極座標 θ ($x = \cos \theta, y = \sin \theta$) を用いれば, これは Fourier 級数

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} [1 + 0.2421 \cos 2\theta + 0.02131 \sin 2\theta + 0.2052 \cos 4\theta + 0.1221 \sin 4\theta + \dots] \quad (39)$$

となっている。

一方, (36) の主軸と固有値を調べると, ひとつの軸は 2.51° 方向で固有値 0.1243, 他は 92.51° 方向に -0.1243 である。したがって, それぞれを新しい x' 軸, y' 軸に選べば

$$D_{i'j'} = \begin{bmatrix} 0.2428 & 0 \\ 0 & -0.2428 \end{bmatrix} \quad (40)$$

であり, 分布形は $x' = \cos \theta', y' = \sin \theta'$ として

$$f(\theta') = \frac{1}{2\pi} [1 + 0.2428 \cos 2\theta' + 0.2233 \cos 4\theta' + 0.3374 \sin 4\theta' + \dots] \quad (41)$$

となる。図-1 にその主軸方向が記入されている。図-2 についても同様である。

この例からも, “等方性からのずれ”を表すファブリックテンソル D_{ij} の直観的イメージが明瞭となる。2次元の場合, D_{ij} の主軸方向を x' 軸, y' 軸とし, 対応する固有値を $\lambda, -\lambda$ とすると, “分布は x' 軸方向に割合 λ だけふくらみ, y' 軸方向に割合 λ だけへこむ”ということである。3次元の場合, D_{ij} の主軸方向を x' 軸, y' 軸, z' 軸とし, 対応する固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ($\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$) とすると, “分布は x' 軸, y' 軸, z' 軸方向にそれぞれ割合 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ だけふくらむ”ということであり, “等方性からのずれ”がなぜ D_{ij} で記述されるのかが理解できる。

次に分布の適合度を考える。図-1 のデータ数は $N = 577$ であり, $ND_{ij}D_{ij}/4 (=N(a_2^2 + a_2^2)/2)$ は 17.04 となる。図-2 のデータ数は $N = 527$ であり, 同じ統計量は 26.53 となる。 $\chi_0^2(2, 0.005) = 10.60$ であるから, どちらも信頼水準 0.005 で「有意」であり, 一様分布とみなすことができない。次に D_{ijkl} の項を考えると $ND_{ijkl}D_{ijkl}/16 (=N(a_4^2 + b_4^2)/2)$ は図-1 で 16.44, 図-2 で 6.201 となる。したがって同じ信頼水準で図-1 は有意であり, 図-2 は有意ではない。すなわち, 図-1 では D_{ijkl} の影響が無視できないほど存在しており, D_{ij} で記述できる直交異方性のみでは不十分である。一方, 図-2 では D_{ijkl} の影響は無視できて, D_{ij} で表される直交異方性として十分に記述できるということである。

以上のことは実は図-1, 図-2 をながめれば察しのつくことであるが, このような統計的検定の意義は, 同じような実験を多数回行うときに, いちいちデータをヒストグラム化して, 人間がながめて, そのつど判定するという必要がないことである。また, 3次元のデータなら

ヒストグラムを図示することもできない。このような場合、データから D_{ij} , D_{ijkl} 等を計算しさえすれば自動的に判定が行えて、2次元、3次元に無関係に実行できる。特にコンピューターを用いればより効率的となる。

さて、以上のような定量化を行った後、この分布の変化が荷重の変化とどのような関係があるかということが問題となる。応力テンソル σ_{ij} は2階の対称テンソルであるから、 N_{ij} あるいは F_{ij} , D_{ij} とテンソル関係式で結ばれていると考えるのは自然である。しかし、具体的にどのような形をしているかは各種の実験結果に待たねばならないであろう。理論的見地からは、 D_{ij} が等方性からのずれを表すテンソルであり、 $\sigma_{(ij)}$ (偏差応力テンソル) が等方圧縮からのずれを表すテンソルであるから、 $D_{ij} \propto \sigma_{(ij)}$ となるのが自然である。しかし、これも実験との対応によって結論されるべきことであろう。

序論にも述べたように、数多くの実験結果に対して、単にそれをながめて定性的な傾向を見るのでは不十分であり、それを定量化する必要がある。このとき、諸量を思いつきで導入するのではなく、本論文に示したように、理論体系に基づいた解析を行うことによって、土質力学は精密科学としても更に発展できると思われる。

付録. 偏差成分の定義

一般に対称テンソル $A_{i_1 \dots i_n}$ (n は偶数とする) があつたとき、その偏差成分とは、これと、それを次々と縮約したものととの線形結合

$$A_{i_1 \dots i_n} = c_0^n A_{i_1 \dots i_n} + c_2^n \delta_{(i_1 i_2} A_{i_3 \dots i_n) j_1 j_1} + c_4^n \delta_{(i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} A_{i_5 \dots i_n) j_1 j_1 j_3 j_3} + \dots + c_n^n \delta_{(i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \dots \delta_{i_{n-1} i_n)} A_{j_1 j_1 j_3 j_3 \dots j_{n-1} j_{n-1}} \quad (A.1)$$

であつて、 $c_0^n = 1$ かつ $c_2^n, c_4^n, \dots, c_n^n$ を $A_{i_1 \dots i_n}$ のどの指標に関して縮約しても0となるように定めたものである。その結果は次のようになる¹⁵⁾。

$$c_m^n = \begin{cases} (-1)^{m/2} \binom{n}{m} \binom{n-1}{m/2} / \binom{2n-1}{m} & (3 \text{次元}) \\ (-1)^{m/2} \frac{n}{2^m} \binom{n-m/2}{m/2} & (2 \text{次元}) \end{cases} \quad (A.2)$$

[3次元の例]

$$A_{(ij)} = A_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} A_{kk}$$

$$A_{(ijkl)} = A_{ijkl} - \frac{6}{7} \delta_{(ij} A_{kl)mm} + \frac{3}{35} \delta_{(ij} \delta_{kl)} A_{mnnn}$$

$$A_{(ijklmn)} = A_{ijklmn} - \frac{15}{11} \delta_{(ij} A_{klmn)pp} + \frac{5}{11} \delta_{(ij} \delta_{kl} A_{mn)ppqq} - \frac{5}{231} \delta_{(ij} \delta_{kl} \delta_{mn)} A_{ppqqrr}$$

[2次元の例]

$$A_{(ij)} = A_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} A_{kk}$$

$$A_{(ijkl)} = A_{ijkl} - \delta_{(ij} A_{kl)mm} + \frac{1}{8} \delta_{(ij} \delta_{kl)} A_{mnnn}$$

$$A_{(ijklmn)} = A_{ijklmn} - \frac{3}{2} \delta_{(ij} A_{klmn)pp} + \frac{9}{16} \delta_{(ij} \delta_{kl} A_{mn)ppqq} - \frac{1}{32} \delta_{(ij} \delta_{kl} \delta_{mn)} A_{ppqqrr}$$

参考文献

- 1) Cowin, S. C. and Satake, M. (1978) : Continuum Mechanical and Statistical Approaches in the Mechanics of Granular Materials, (eds.) (Proc. U. S. -Japan Seminar, Sendai, 1978), Gakujutsu Bunken Fukyukai, Tokyo.
- 2) Jenkins, J. T. and Satake, M. (eds.) (1983) : Mechanics of Granular Materials - New Models and Constitutive Relations, (Proc. U. S. -Japan Seminar, Ithaca, 1982), Elsevier Amsterdam.
- 3) 金谷健一 (1980) : 粒状体の粒子モデルと仮想仕事の原理, 「土質工学会論文報告集」, Vol.20, No.3, pp.111~116.
- 4) Kanatani, K. (1981) : "A theory of contact force distribution in granular materials," Powder Technology, Vol.28, No.2, pp.167-172.
- 5) Kanatani, K. (1983) : "Mechanical properties of ideal granular materials," in 2), pp.235-244.
- 6) Satake, M. (1982) : "Fabric tensor in granular materials," Deformation and Failure of Granular Materials (Proc. IUTAM Conf., Delft, 1982, ed. by P. A. Vermeer and H. J. Luger), Rotterdam, A. A. Balkema, pp.63-68.
- 7) 金谷健一 (1980) : 粒状体の統計モデルとエントロピー, 「土質工学会論文報告集」, Vol.20, No.4, pp.151~160.
- 8) Kanatani, K. (1981) : "The use of entropy in the description of granular materials," Powder Technology, Vol.30, No.2, pp.217-223.
- 9) Kishino, Y. (1983) : "Generalized relationship between stress and dilatancy in granular materials," in 2), pp.117-126.
- 10) Oda, M. (1977) : "Co-ordination number and its relation to shear strength of granular material," Soils and Foundations, Vol.17, No.2, pp.29-42.
- 11) 金谷健一 (1980) : せん断, 圧縮と構成方程式, 「土と基礎」, Vol.28, No.275, pp.5~9.
- 12) Rowe, P. W. (1962) : "The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact," Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, Vol.269, pp.500-527.
- 13) Oda, M. (1978) : "Significance of fabric in granular mechanics," in 1), pp.7-26.
- 14) Konishi, J., Oda, M. and Nemat-Nasser, S. (1982) : "Inherent anisotropy and shear strength of assembly of oval cross-sectional rods," Deformation and Failure of Granular Materials (Proc. IUTAM Conf. Delft, 1982, ed. by P. A. Vermeer and H. J. Luger), Rotterdam, A. A. Balkema, pp.63-68.
- 15) Kanatani, K. (1984) : "Distribution of directional data and fabric tensors," Int. J. Engng. Sci. (to appear).
- 16) 金谷健一 (1982) : 誘導異方性とその表現, 「土質工学会論文報告集」, Vol.22, No.1, pp.136~140.
- 17) 金谷健一 (1982) : 回転群表現論による異方性の表示方法, 「土質工学会論文報告集」, Vol.22, No.4, pp.203~209.