土質工学会論文報告集
Vol. 19, No. 4, Dec. 1979

粒状体の速度場の理論
――関連流動則と特性曲面――

(A Theory for the Velocity Field of Granular Materials
――Associated Flow Rule and Characteristic Surface――)

金　谷　健　一* (Ken-ichi Kanatani)

キーワーズ：応力／降伏／すべり面／塑性／土質力学〔一般〕／内部摩擦角／粘着力／粒状体
IGC:　E0/E8/D6

1. まえがき

粒状体の塑性理論はまず降伏理論から始まったといってよいであろう。いわゆる Coulomb 則に始まり，三次元的拡張として拡張 Mises 則，拡張 Tresca 則，Mohr-Coulomb 則などが提案され，検証のための実験とともに，種々の修正，拡張も試みられている（最上[1]，橋口[2]）。また Coulomb 則に基づいた極限応力方程式が Kötter によって導かれ，Sokolovskii[3]，山口[4),5)] らによってすべり線解析理論として発展した。一方，圧縮やせん断を受けた粒状体のダイレイタンシーを伴う変形，及び破壊に至る過程の現象論的体系化が Roscoe ら多くの人々によって行われている[6]。しかし，破壊後の流動状態に対する運動理論は余り研究されていない。金属塑性論に対応する速度場の理論が Drucker and Prager[7] によって提案され，Shield[8),9),10)]，山口[11]，橋口[12]らによって種々の応用，検討がなされたが，後述のように問題点が残されている。一方，Spencer[13] は応力特性曲線にそってすべりが生じるという仮定により理論を展開した。これは Mandel[14]，Mandl and Fernández Luque[15]，de Josselin de Jong[16]，橋口[17]らによって更に詳しく論じられており，二重すべりの理論ともよばれている。そして，Morrison and Richmond[18]がホッパーやシュートの流れに適用している。しかし，三次元に拡張困難な二次元理論であり，また基本的仮定に疑問も残っている。最近では Goodman and Cowin[19),20),21)]による理論が提案され，これを応用，拡張する研究もさかんである[22]。これは極めて少数の仮定に基づく一般論の数学的定式化を試みる，いわゆる有理力学 (rational mechanics) とよばれる方法を用いたものである。一方，金谷[23),24),25)]は粒子モデルに統計的手法を適用して等価な連続体理論を構成するという研究を発表している。このような経過をふまえて，本論文では Drucker ら[7]によって提案された塑性論的な理論を再検討する。そして，彼の与えた解釈に問題があることを指摘し，これまで生じていた困難に合理的な解決を与えようとするものである。

まず Mandl ら[15]に基づいて，粒状体の速度場が満たすべき性質と考えられる項目を列挙してみよう。

1)　三次元性の条件。速度場の方程式は三次元テンソル関係式で与えられねばならない。このことはあえて述べるまでもないことではあるが，従来，主として平面運動を考えることが多かったため，ほとんどの理論が二次元理論であり，中には三次元への拡張の困難なものもあった。応用は平面運動に限定するとしても，結局それは三次元運動の一側面である以上，理論構成は三次元で行うべきであろう。

2)　塑性流動の条件。完全塑性流動あるいは剛塑性流動を考える。すなわち，ある速度場が与えられれば内部の応力状態は定まるが，逆は成立しない。したがって，応力テンソルとひずみ速度テンソルとの間には一対一対応が存在しない。このことは応力テンソルの各成分が互いに代数的に独立ではなく，ある関係式によって関係づけられていなければならないことを意味する。これを応力関係式とよぶことにする。これは普通，降伏条件と同一視される。

3)　等方，共軸条件。粒状体は等方的であると仮定する。したがって応力テンソルとひずみ速度テンソルとは主軸が一致していなければならない。これは Saint Venant の原理ともよばれる。もちろん現実には異方性をもつものも存在し，運動に伴って異方性が発達する場合もあるが，ここでは等方性を保つ場合を考えることにする。

4)　非圧縮性の条件。降伏に至るまではダイレイタン

* 群馬大学工学部情報工学科　助手（桐生市天神町 1-5-1）
・この論文に対するディスカッションは昭和55年10月1日までにご投稿下さい。

シーを生じることが多いが，流動状態では体積は一定であると考えてよいであろう。

5) 関連流動則。これは Drucker[26),27)] が塑性変形の安定性を要請するために導入したもので，塑性変形に要する仕事は負でないことの表現である。これよりひずみ速度テンソルは応力関係式が応力空間上でつくる曲面に直交するという結論を得る。したがって垂直性の条件ともよばれる。

6) 特性曲面の条件。応力関係式と釣合い条件とにより定まる応力の特性曲面は速度場の方程式の定める特性曲面と一致しなければならない。もしそうでなければ，境界条件として応力又は速度を指定して解を定めることが不可能になると考えられる。

ところが Coulomb 則をもとにした応力関係式を用いたのではこれらの条件が同時には満足できないことが直ちに分かる。そこで，どの条件を除くかをめぐって多くの議論がなされた。Drucker and Prager[7)] は拡張 Mises 則を降伏条件とし，これに関連流動則を適用した。結果は等方，共軸性を満たすが，必然的に体積増加を伴う。彼らはそれをダイレイタンシーであると説明しているが，定常的に生じることになり，かつ定量的にも大きすぎるという困難が生じる。これに対して，降伏条件として角のある面からなる拡張 Tresca 則や Mohr-Coulomb 則を用いることや，加工硬化を考える試みもあったが[28),29),30),31)]，結果は複雑であり，また等方共軸性と関連流動則の仮定とにより一般には特性曲面の条件が満たされなくなる。逆に特性曲面を重視して等方共軸性を捨てることも多く論じられた（Takagi[32)], Hythornthwaite[33)], Davis[34)], Mandl et al.[15)]）。これらはほとんど二次元理論である。Mandl ら[15)]は非共軸性の根拠として，二次元理論に限定すれば等方性は必ずしも共軸性を意味しないと主張しているが，これは運動面に垂直な方向に特殊な方向性がある場合のことであり，納得しがたい議論である。また，Spencer[13)] はひずみ速度が応力のみならず応力速度にも依存すると仮定すれば等方物質でも応力とひずみ速度の関係は必ずしも共軸である必要はないことを指摘した。しかし，応力速度依存のない場合は説明できないという疑問が残る。Goodman-Cowin理論[19),20),21)] では応力がひずみ速度以外に，粒状体の充てん率の勾配から作られるテンソルにも依存しているという仮定が用いられているが，充てん率勾配依存のない場合の説明はできない。

本論文では混乱の原因が 5) の関連流動則と 6) の特性曲面との解釈の仕方に問題のあることを指摘したい。まず次節で関連流動則と特性曲面の定義やその意味を考察する。そこにおいて関連流動則に対して拘束応力の果たす役割を考慮した新しい解釈を提案する。次に1)～6) の条件に従って，金属塑性論と並行した理論を展開する。これは金属塑性論の Levi-Mises 理論に対応していることが分かる。また，金谷[23),24),25)] の粒子統計モデルとの対応も明らかになる。これについて特性曲面の解析を行う。最後に運動方程式を変分原理により定式化し，それを用いて斜面上の流動の安定性を考察する。

2. 関連流動則と特性曲面

関連流動則とはひずみ速度が塑性ポテンシャルから導かれることを主張するものである。これは金属塑性論において Hill[35)] が便宜上の仮定として用いているが，金属結晶のすべりに関する Schmidt 則から導くこともできる。これはまた Taylor-Bishop-Hill 理論[36),37),38),39)] の最小すべりの原理及びそれと線形計画の意味で双対[40)] な最大仕事の原理と関連している。これに対し Drucker[26),27)] は物質安定の基本仮説（fundamental postulate of material stability）を提案し，これから関連流動則が導かれることを示した。Drucker の仮説は強すぎるとして，後に Il'iushin[41)] がより弱い仮説を提唱し，また前述の有理力学の立場より Green and Naghdi[42)] が温度を考慮した基本原理を与えたが，それらからは明快な結論が得られず，Drucker の理論が広く受け入れられることになった。そこで，まず Drucker の仮説，及びそれより関連流動則を導く過程をふりかえってみる。Drucker の仮説は次のように述べることができる。

「物質が任意の安定な初期応力状態にあるとき，これに外力を加え，また除荷し，初期応力の状態へもどしたとする。このとき外力のした仕事は負でない。」

Il'iushin[41)] の提案はこの応力のサイクルをひずみのサイクルに置き換えるものであるが，この仮説そのものは一見極めて自然な仮定と思われる。そこで初期応力を σ^{*ji} とし，$t=0$ で負荷を始め，$t=t_1$ で降伏し，更に $t=t_2$ まで負荷したのち除荷し，$t=t_3$ で初期応力 σ^{*ji} の状態へもどったとする。なされた仕事 W は単位体積当たり

$$W=\int_0^{t_3}\sigma^{ji}\dot{e}_{ji}dt \qquad (1)$$

である。ただし e_{ji} はひずみテンソルであり，ドットは物質時間微分を表す。以下，指標に関する総和規約等のテンソル記法を用い，座標系は直交座標とする。微小ひずみを考え，ひずみ e_{ji} を弾性ひずみ $e_{ji}{}^e$ と塑性ひずみ $e_{ji}{}^p$ とに分解し，応力 σ^{ji} は次のように弾性ひずみによって定まるとする。

$$e_{ji}=e_{ji}{}^e+e_{ji}{}^p,\quad \sigma^{lk}=E^{lkji}e_{ji}{}^e \qquad (2)$$

ただし E^{lkji} は弾性係数テンソルであり，応力がポテンシャルエネルギー（熱が介在していれば自由エネルギー）から導かれるときは次の条件を満たす。

$$E^{lkji}=E^{klji}=E^{lkij}=E^{jilk} \qquad (3)$$

これを用いると弾性ひずみに関する仕事は0となるので式（1）は

$$W=\int_{t_1}^{t_2}\sigma^{ji}\dot{e}_{ji}{}^{p}dt \qquad (4)$$

となる。一方，初期応力 σ^{*ji} のする仕事は上式の σ^{ji} を σ^{*ji} で置き換えて

$$W^*=\int_{t_1}^{t_2}\sigma^{*ji}\dot{e}_{ji}{}^{p}dt \qquad (5)$$

となる。外力のした仕事は $W-W^*$ であり

$$W-W^*=\int_{t_1}^{t_2}(\sigma^{ji}-\sigma^{*ji})\dot{e}_{ji}{}^{p}dt\geq 0 \qquad (6)$$

となる。$t_2\to t_1$ の極限をとれば

$$(\sigma^{ji}-\sigma^{*}{}_{ji})\dot{e}_{ji}{}^{p}\geqq 0 \qquad (7)$$

となる。これは「降伏条件を満たさない任意の初期応力 σ^{*ji}」に対し，6次元ベクトル $\sigma^{ji}-\sigma^{*ji}$ と $\dot{e}_{ji}{}^{p}$ とのなす角が鈍角ではないことと解釈できる。これより（1）降伏曲面は凸であり（角があってもよい）（2）法線があれば，すなわち角以外では $\dot{e}_{ji}{}^{p}$ は法線方向である，と結論できる。特に降伏曲面がなめらかで

$$f(\sigma^{ji})=0 \qquad (8)$$

で与えられるなら，Λをスカラー量として，

$$\dot{e}_{ji}{}^{p}=\Lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma^{ji}} \qquad (9)$$

となる。これが関連流動則とよばれるものである。

この関連流動則は金属塑性論では広く受け入れられている。しかし，砂などの粒状体ではfに観測される降伏条件式を用いた場合，式（9）は成立しないという報告もある[6]。橋口[43]は変形とともに物質の弾性的性質が変化し，E^{lkji} が一定ではないから上述の議論は不十分で，かわりに式（7）より導かれる解の安定性に関する命題を基本的前提にすることを提案している。しかし，そのような場合を除けば，上述の議論は十分一般的であり，特殊な仮定を用いていないため疑問の余地がないように思える。ところが，Drucker 自身が指摘しているように[44]，次のような単純な例に適用してみれば明白な不合理を生じることが分かる。

図-1 のような板上のすべりを考えると，降伏条件は $F=\pm\mu N$ と表せる。μは摩擦係数であり，簡単のため静止摩擦係数と運動摩擦係数との差違を無視する。これに関連流動則を用いれば 図-2 のように垂直方向の速度成分を生じてしまう。Druckerは粒状体の関連流動則を前提にしているので，ゆえに板上のすべりと粒状体内のすべりとは一見類似しているが変形機構が異なると結論している。しかし，そもそもこのモデルは Coulomb 則の原型であり，結局は微細な凹凸のある物質間のすべりであるから，板上のすべりと粒状体内のすべりとに差がある理由は考えられない。そこで関連流動則のもとになる

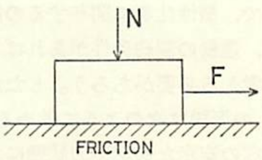

図-1 板上のすべりモデル

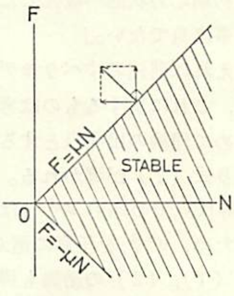

図-2 板上のすべりの降伏条件

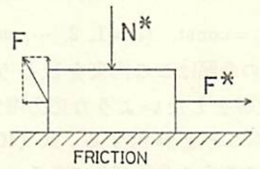

図-3 Drucker の仮説を満たさない板上のすべり

Drucker の仮説を直接適用してみると，やはり次のような反例が生じる。図-3のように大きな垂直荷重 N^*，水平荷重 F^* のもとで静止している初期状態に，F^* と反対向きの小さな成分と N^* の反対方向に大きな成分とをもつ外力Fを作用させる。するとすべりは F^* の方向に生じ，外力Fのする仕事は負になる。これは垂直方向の拘束圧が緩和されるためである。ここで外力のする仕事を正になるよう強制するには垂直方向に持ち上げざるを得ないことになる。これが関連流動則により体積増加が予言される原因に対応するものである。

以上により，運動の幾何学的拘束とそれに対応する拘束力とに特別の考慮を払う必要のあることが分かる。一般に連続体の応力はポテンシャル応力（保存応力）と散逸応力とに分解できる（熱が関与すれば更にエントロピー応力が生じる）。しかし，もし運動に幾何学的拘束があればそれに対応した拘束応力が生じる。これは反力，抗力ともよばれるものである。対応する応力という意味は，その拘束を破らない運動に対しては仕事をせず，その制約を破ろうとする仮想変位に対してのみ仕事をするような応力の成分のことである。これはまた拘束条件の Lagrange 乗数ともよばれる。運動の拘束条件が加わると系の方程式の数がふえるので，その拘束応力が新たに独立な変数に組み入れられる。非圧縮性流体の静圧力はその例である。また前述のモデルでは垂直圧が拘束力で

ある。ところで，塑性仕事に関与するのは当然，散逸応力であるから，運動の制約条件があれば対応する拘束応力は除外して考える必要があろう。したがって，この場合，Drucker の仮説は次のように改めるべきであろう。

「物質が任意の安定な初期応力状態にあるとき，これに負荷，除荷を行い，拘束応力を変化させないような応力経路をとって初期応力状態へ復元したとする。このとき外力のする仕事は負でない。」

このように考えれば前述のすべりモデルには何の不都合もなくなるし，これに反するものは考えにくい。そこでこの仮説を認めて理論の出発点とすると，既に用いた議論によりやはり式（7）が導かれる。しかし，今や初期応力 σ^{*jl} と降伏点での応力 σ^{jl} とは特殊な応力経路で結ばれているため，σ^{*jl} を任意に選ぶことができない。したがって（1），（2）の結論も得られない。

応力経路の制約を式で表すことを考える。ひずみ e_{jl} の拘束条件を

$$g_\alpha(e_{jl})=\text{const.}\quad(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\qquad(10)$$

とおく。前述の命題はこの拘束を破ろうとする仮想変位に対して仕事をしないような応力増分 $\sigma^{jl}(t+dt)-\sigma^{jl}(t)$ を選ぶことと解釈する。式（10）は6次元 e_{jl} 空間内の曲面の集合の共通部分である。各 g_α のつくる曲面がなめらかであれば，その法線方向は $\partial g_\alpha/\partial e_{jl}$ である。ゆえに求める応力経路の制約条件は

$$\dot{\sigma}_{jl}\frac{\partial g_\alpha}{\partial e_{jl}}=0\quad(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\qquad(11)$$

である。特に拘束が線形であり，$A_\alpha{}^{jl}$ を定数として

$$A_\alpha{}^{jl}e_{jl}=\text{const.}\quad(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\qquad(12)$$

と表せれば式（11）は

$$(\sigma^{jl}-\sigma^{*jl})A_\alpha{}^{jl}=0\quad(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\qquad(13)$$

となる。ゆえに式（13）を満たす任意の初期応力 σ^{*jl} に対して式（7）が成立することが要求される。

例えば非圧縮性の拘束条件

$$e_{kk}=\text{const.}\qquad(14)$$

を考える。このとき式（13）は

$$\sigma^{kk}=\sigma^{*kk}\qquad(15)$$

となる。応力，ひずみの偏差成分を次のようにおく。

$$\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}^{jl}&\equiv\sigma^{jl}-\frac{1}{3}\delta_{jl}\sigma^{kk}\\ \bar{e}_{jl}&\equiv e_{jl}-\frac{1}{3}\delta_{jl}e_{kk}\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

ただし δ_{jl} は Kronecker のデルタである。式（7）は

$$(\bar{\sigma}^{jl}-\bar{\sigma}^{*jl})\dot{\bar{e}}_{jl}{}^p+\frac{1}{3}(\sigma^{kk}-\sigma^{*kk})\dot{\bar{e}}_{kk}{}^p\geqq0\qquad(17)$$

と書き直すことができる。式（15）を用いれば

$$(\bar{\sigma}^{jl}-\bar{\sigma}^{*jl})\dot{\bar{e}}_{jl}{}^p\geqq0\qquad(18)$$

となる。ところで初期応力 σ^{*jl} の偏差成分 $\bar{\sigma}^{*jl}$ とトレース部分 σ^{*kk} とは独立に選べるので，制約式（15）があっても $\bar{\sigma}^{*jl}$ は任意に選べる。したがって式（18）が「降伏条件を満たさない任意の偏差応力 $\bar{\sigma}^{*jl}$」について成立しなければならないことが分かる。そこで，降伏条件式（8）の σ^{jl} を偏差成分 $\bar{\sigma}^{jl}$ と静圧力 $p\,(=-(1/3)\sigma^{kk})$ とに分けて

$$f(\bar{\sigma}^{jl},\ p)=0\qquad(19)$$

と表そう。このとき式（18）が任意の $\bar{\sigma}^{*jl}$ で成立することから関連流動則

$$\dot{\bar{e}}_{jl}{}^p=\Lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma^{jl}}\qquad(20)$$

を得る。ただし $\partial/\partial\sigma^{jl}$ は p を定数と考え，$\bar{\sigma}^{jl}$ を $\sigma^{jl}-(1/3)\delta_{jl}\sigma^{kk}$ と考えて微分するものである。このとき，結果が偏差成分になっていることは

$$\frac{\partial f}{\partial\sigma^{jl}}=\frac{\partial f}{\partial\bar{\sigma}^{lk}}\frac{\partial\bar{\sigma}^{lk}}{\partial\sigma^{jl}}=\frac{\partial f}{\partial\bar{\sigma}^{lk}}(\delta_{lj}\delta_{kl}-\delta_{jl}\delta_{lk})\qquad(21)$$

より明らかである。以上が Drucker の仮説の妥当な解釈であり，関連流動則の正確な表現であると思われる。この新しい解釈を金属塑性論に適用しても何の変更も生じない。それは金属塑性論では f が偏差応力 $\bar{\sigma}^{jl}$ のみの関数で静圧力 p によらないと仮定されているためである。

ところで今は非圧縮性を仮定しているが，膨張圧縮も同時に考慮したいときは従来のままでよいのかという疑問が生じる。それに対しては次のように考えよう。そもそも粒状体の降伏条件のほとんどは Coulomb 則の拡張である。この Coulomb 則は局所的な固体摩擦をモデルにしている以上，そこには運動はすべり方向に起こり，垂直方向には変位しないという暗黙の仮定が存在している。したがって，それを一般化した塑性理論には当然非圧縮性の条件が付随していると考えなければならない。もし膨張も考慮したいのであれば，すべり以外の何らかの膨張降伏の機構を表す条件を導入しなければならないはずである。

次に特性曲面について考察する。特性曲面を Thomas[45] に従って次のように定義する。ある偏微分方程式系とある空間曲面とを考える。この曲面上で未知関数の，方程式系に現れる最高階数以下の階数の導関数（0階も含む）がすべて指定されたとする。これらの量を方程式系に代入すれば最高階数の導関数が一般には求まるはずであるが，特にその最高階数の導関数の面内方向成分しか定まらない場合，その曲面を特性曲面であるという。したがって，その面上で未知関数の最高階数以下の階数の導関数の値を指定したものを初期値として面外へ求積してゆくことができない。これをいいかえれば，最高階数の導関数に不連続が生じ得る面といえる。二次元の場合には通常の特性曲線の定義と一致する。

応力の特性曲面とは応力関係式（降伏条件）と応力の

釣合い方程式（又は運動方程式）とにより定まる特性曲面のことである。一方，応力は速度場が与えられれば定まるので，速度とその導関数により定まる。ゆえに応力の特性曲面は同時に速度場の方程式系の特性曲面でもなければならない。ところで，ひずみ速度テンソルの主軸が指定されたとき，その条件と非圧縮性の条件とから定まる特性曲面は平面運動の場合，運動面内の主軸と $\pi/4$ の角度をなすことが分かる[11]。等方性を仮定すれば応力とひずみ速度とは主軸が一致していなければならない。ゆえに平面運動では最大せん断力面が速度場の特性曲面となる。これは一般には応力の特性曲面と一致しない。

従来はこれが矛盾と考えられていた。したがって等方性と非圧縮性とは両立しないと考えられていたようである[11]。しかし，上述の議論から得られる結論は，(1)応力の特性曲面は速度場の特性曲面である，(2)最大せん断力面は速度場の特性曲面である，の二点であって，これから応力の特性曲面が最大せん断力面であるとは結論できない。なぜなら，応力は速度勾配と結びついており，速度場の方程式系は微分の階数が応力釣合い条件の階数より大きいため，特性曲面として応力の特性曲面と最大せん断力面との両方を持ち得るからである。このことは後節で更に詳しく調べる。

3. 粒状体の速度場の方程式

ひずみ速度テンソルを

$$E_{jl}=\partial({}_jv_l)(=\dot{e}_{jl}) \tag{22}$$

とおく。ただし v_l は速度ベクトルであり ∂_l は $\partial/\partial x^l$ を表す。(　)は成分の対称化を表し，式 (22) の場合は $(1/2)(\partial_j v_l+\partial_l v_j)$ を意味する。座標系は直交座標を用いているので，共変成分，反変成分の区別はなく，v_l を v^l と書いても同じ量を表す。本論文では弾性成分を無視した完全塑性流動（剛塑性流動）を考える。非圧縮性条件により

$$E_{kk}(=\partial_k v^k)=0 \tag{23}$$

である。このとき Lagrange 乗数としての静圧力 p は独立な変数となり，三次元運動方程式と式 (23) の非圧縮性条件との 4 つの方程式が 4 つの独立変数 p, v_x, v_y, v_z を定める方程式系となる。したがって p は構成式によっては与えられない。構成式で与えるべきものは偏差応力 $\tilde{\sigma}^{jl}$ であるが，等方性の場合次のように表せる。

$$\tilde{\sigma}^{jl}=\psi_1 E_{jl}+\psi_2\left(E_{jk}E_{kl}-\frac{1}{3}\delta_{jl}E_{lk}E_{lk}\right) \tag{24}$$

ただし ψ_1, ψ_2 は p, $E_{jl}E_{jl}$, $E_{kj}E_{jl}E_{lk}$ のスカラー関数である。E_{jl} の三次以上の項は Caylay-Hamilton の定理により二次以下の項で表現できることと，$E_{kk}=0$, $\tilde{\sigma}^{kk}=0$ とを考慮して式 (24) が得られる。有理力学の人々はこれを Reiner-Rivlin の構成式とよんでいる。

ψ_1, ψ_2 を具体的に定めるために関連流動則を用いよう。応力関係式として何を用いるかが問題となるが，まず Drucker and Prager[7] の用いた拡張 Mises 則

$$f(\tilde{\sigma}^{jl}, p)\equiv\sqrt{\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^{jl}\tilde{\sigma}^{jl}}-\alpha p-k=0 \tag{25}$$

を用いてみる。関連流動則の新しい解釈，式 (20) によれば

$$E_{jl}=\frac{\Lambda}{2}\frac{\tilde{\sigma}^{jl}}{\sigma p+k} \tag{26}$$

となる。Λ を定めるにはこれを $\tilde{\sigma}^{jl}$ について解いて $f=0$ に代入すればよい。これより

$$\Lambda=\pm\sqrt{2E_{jl}E_{jl}} \tag{27}$$

を得る。よく知られたエントロピーの原理による熱力学的安定性により，単位体積当たりのエネルギーの散逸速度 Φ について

$$\Phi\equiv\tilde{\sigma}^{jl}E_{jl}\geqq 0 \tag{28}$$

でなければならないので正の符号が選ばれる。結局，式 (26) より構成方程式が次のように与えられる。

$$\tilde{\sigma}^{jl}=\frac{\alpha p+k}{\sqrt{\frac{1}{2}E_{lk}E_{lk}}}E_{jl} \tag{29}$$

この右辺は E_{jl} の 0 次同次式であり，E_{jl} の大きさ自体に意味はなく，その主軸方向と静圧力とが意味をもっている。したがって $\tilde{\sigma}^{jl}$ と E_{jl} とは一対一対応がつかず，流れは完全塑性流動である。特に $\alpha=0$ として静圧力の効果を無視すると，これは金属塑性論の Levi-Mises の式となる[25]。

内部摩擦角を ϕ，粘着力を c として，平面運動の場合に Coulomb 則と一致するように α, k との対応をつけよう。運動面を x-y 面とし，y 軸を大きい圧縮力に対応する主軸にとると式 (29) より E_{jl}, $\tilde{\sigma}^{jl}$ は次のように表せる。

$$E_{jl}=\begin{pmatrix} e & & \\ & -e & \\ & & 0\end{pmatrix},\quad \tilde{\sigma}^{jl}=\begin{pmatrix} s & & \\ & -s & \\ & & 0\end{pmatrix}\quad e,\ s>0 \tag{30}$$

これらを式 (29) へ代入すると

$$s=\alpha p+k \tag{31}$$

となる。これを Mohr 円と対応させることにより

$$\alpha=\sin\phi,\quad k=c\cos\phi \tag{32}$$

となる。これは Drucker and Prager[7] の結果とは異なる。

次に応力関係式として拡張 Mises 則が妥当かどうかを考えよう。降伏条件としては必ずしも適切でなく，Mohr-Coulomb 則の方がより適切であることが知られている[1]。しかし，降伏時に Mohr-Coulomb 則を満たしていても，流動が開始するや否や拡張 Mises 則を満たすようになるとも考えられる。それは次のような考えによる。Mohr-Coulomb 則はどこか一つの向きの面素

上で Coulomb のすべり則が満たされたとき降伏が始まると考えるものであるが，拡張 Mises 則はそれがすべての方向の面素で平均的に満たされるものであるという意味づけができる。法線 n_i をもつ面素上のせん断応力 τ^i と垂直応力 σ とは次のように表される。

$$\sigma=-n_j n_i \sigma^{ji},\quad \tau^i=n_j\sigma^{ji}-n_k n_j n_i \sigma^{kj} \tag{33}$$

Coulomb 則によれば，ある定数 μ', c' に対して

$$\sqrt{\tau^i\tau^i}=\mu'\sigma+c' \tag{34}$$

が満たされたとき，その面素にすべりが生じる。そこで，これが平均的に満たされる条件として

$$\overline{\tau^i\tau^i-(\mu'\sigma+c')^2}=0 \tag{35}$$

を考える。ただし ¯ は n_i を，全立体角にわたって平均することを意味する。ここで式 (33) を代入し，公式

$$\left.\begin{aligned}&\overline{n_j n_i}=\frac{1}{3}\delta_{ji},\quad \overline{n_k n_j n_i}=0\\&\overline{n_l n_k n_j n_i}=\frac{1}{15}(\delta_{lk}\delta_{ji}+\delta_{lj}\delta_{ki}+\delta_{li}\delta_{kj})\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

を用いれば拡張 Mises 則 (25) を得る。ただし

$$\alpha=\sqrt{\frac{15\mu'^2}{2(3-2\mu'^2)}},\quad k=\sqrt{\frac{15}{2(3-2\mu'^2)}}c' \tag{37}$$

である。以上のことより，降伏時には Mohr-Coulomb 則を満たしていても，流動が開始すると，構成粒子はその配置を変えることができて，応力が平均化され，拡張 Mises 則に従うと考えることは不自然ではない。更に式 (29) で $k=0$ とおくと，これは金谷[23),25)]が非粘着性の粒子モデルを用いて計算したものにおいて粒子回転の影響を無視したものに一致する。拡張 Mises 則以外のものとして，降伏を実験的にもよく表現し，かつ簡単な表現をもつ Matsuoka and Nakai[46)] の式を考えてみよう。式の変形の結果

$$f(\tilde\sigma^{ji},p)\equiv p^3-\frac{1}{6}\tilde\sigma^{ji}\tilde\sigma^{ji}+\beta\Big(p^3-\frac{1}{2}p\tilde\sigma^{ji}\tilde\sigma^{ji}-\frac{1}{3}\tilde\sigma^{kj}\tilde\sigma^{ji}\tilde\sigma^{ik}\Big)=0 \tag{38}$$

となる。これも Coulomb 則 (34) の何らかの意味での空間平均であると考えられる。これに関連流動則の新解釈を適用すると

$$E_{ji}=-\Lambda\left\{\left(\beta+\frac{1}{3}\right)p\tilde\sigma^{ji}+\beta\left(\tilde\sigma^{jk}\tilde\sigma^{ki}-\frac{1}{3}\delta_{ji}\tilde\sigma^{lk}\tilde\sigma^{lk}\right)\right\} \tag{39}$$

となる。これも Reiner-Rivlin の構成式の形である (式 (24) とは E_{ji} と $\tilde\sigma^{ji}$ とが逆の関係になる)。Λ を定めるには式 (39) を $\tilde\sigma^{ji}$ について解いて式 (38) の $f=0$ へ代入すればよいが，計算は極めて複雑となる。この点からも式 (29) を用いることが実際的であると思われる。そこで，以下，式 (29) を用いて，いろいろな性質を検討してみることにする。

4. 粒状体の特性曲面

連続体の運動方程式は次のように与えられる。

$$\rho\frac{dv^i}{dt}=\partial_j\sigma^{ji}+\rho b^i \tag{40}$$

ただし ρ は密度，b^i は単位質量当たりの外力であり，d/dt は Lagrange 微分 (追跡微分) $\partial/\partial t+v^i\partial_i$ である。これに構成式 (39) を代入したものと，非圧縮性の条件，式 (23) との次の 4 つの方程式が p, v_x, v_y, v_z を支配する方程式である。

$$\left.\begin{aligned}&\rho\frac{dv^i}{dt}=-\partial_i p+\frac{\alpha}{\Lambda}E_{ji}\partial_j p+\frac{\alpha}{2\Lambda}\tilde p\Delta v^i\\&\qquad-\frac{\alpha}{2\Lambda^3}\tilde pE_{ji}E_{lk}\partial_j\partial_l v^k+\rho b^i\\&\partial_i v^i=0\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

ただし

$$\tilde p=p+k/\alpha,\quad \Lambda=\sqrt{\frac{1}{2}E_{ji}E_{ji}} \tag{42}$$

とおいた。Δ は Laplace の演算子である。

次にこの方程式系の特性曲面を求める。ここでは Thomas[45)]，Hill[47)] らの用いた不連続量を表す記号 [ ] を用いる。図-4 のように単位法線 n_i をもつ曲面の n_i の側を +，反対側を − とし，量 Z の + 側の極限 Z^+ から − 側の極限 Z^- を引いたものを $[Z]$ と表す。既に述べたように，特性曲面は最高階の導関数に不連続が生じ得る面である。そこで未知変数 p, v_i の最高階導関数 $\partial_i p$, $\partial_k\partial_j v^i$ に不連続が生じ，他の量は連続であるとする。∂_n を法線方向の微分として

$$[\partial_n p]=P,\quad [\partial_n\partial_n v_i]=V_i \tag{43}$$

とおくと不連続適合条件[45),47)] (付録参照) により，他の不連続成分はすべて P, V_i によって次のように表せる。

$$[\partial_i p]=n_iP,\quad [\partial_k\partial_j v_i]=n_k n_j V_i \tag{44}$$

そこで式(41)の第一式と第二式を微分したものとの[ ]をとると次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}&\left(-\frac{\Lambda^3}{\alpha}n_i+\Lambda^2E_{ji}n_j\right)P\\&\qquad+\frac{1}{2}(\Lambda^2\tilde p\delta_{ik}-\tilde pE_{ji}E_{lk}n_jn_l)V_k=0\\&n_iV_i=0\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

この方程式系において $P=0$, $V_i=0$ でない解が存在する条件はその行列式が 0 となることである。ゆえに

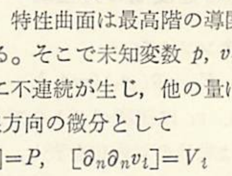

図-4 不連続曲面と不連続量

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{\alpha}\Lambda^3 n_l+\Lambda^2 E_{jl}n_j & \frac{1}{2}(\Lambda^2\tilde{p}\delta_{lk}-\tilde{p}E_{jl}E_{lk}n_j n_l) \\ 0 & n_k \end{vmatrix}=0 \tag{46}$$

となる。特に $n_l=(0,\ 0,\ 1)$ となる直交座標をとると次のようになる。

$$\begin{vmatrix} \Lambda^2 E_{zx} & \frac{1}{2}(\Lambda^2\tilde{p}-\tilde{p}E_{zx}{}^2) & -\frac{1}{2}\tilde{p}E_{zx}E_{zy} & -\frac{1}{2}\tilde{p}E_{zx}E_{zz} \\ \Lambda^2 E_{zy} & -\frac{1}{2}\tilde{p}E_{zy}E_{zx} & \frac{1}{2}(\Lambda^2\tilde{p}-\tilde{p}E_{zy}{}^2) & -\frac{1}{2}\tilde{p}E_{zy}E_{zz} \\ \Lambda^2 E_{zz}-\frac{1}{\alpha}\Lambda^3 & -\frac{1}{2}\tilde{p}E_{zz}E_{zx} & -\frac{1}{2}\tilde{p}E_{zz}E_{zy} & \frac{1}{2}(\Lambda^2\tilde{p}-\tilde{p}E_{zz}{}^2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \tag{47}$$

$$\therefore\ \Lambda^2-\alpha E_{zz}\Lambda-(E_{zx}{}^2+E_{zy}{}^2)=0 \tag{48}$$

ところで $n_l=(0,\ 0,\ 1)$ より

$$\left.\begin{aligned} &E_{zz}=E_{jl}n_j n_l \\ &E_{zx}{}^2+E_{zy}{}^2=E_{zx}{}^2+E_{zy}{}^2+E_{zz}{}^2-E_{zz}{}^2 \\ &\qquad =E_{jk}E_{lk}n_j n_l-E_{lk}E_{jl}n_l n_k n_j n_l \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

ゆえに式 (48) は

$$\begin{aligned} &\Lambda^2-\alpha E_{jl}n_j n_l\Lambda-E_{jk}E_{lk}n_j n_l \\ &\qquad +E_{lk}E_{jl}n_l n_k n_j n_l=0 \end{aligned} \tag{50}$$

と表せる。ところがこれは直交テンソル関係式であり，座標変換不変性により任意の直交座標で成立しなければならない。したがってこれが n_l すなわち特性曲面を定める式である。この各項は E_{jl} の二次同次式であり，式 (29) より $E_{jl}\propto\bar{\sigma}^{jl}$ であるから E_{jl} を $\bar{\sigma}^{jl}$ で置き換えてもよい。そして，$\sqrt{(1/2)\bar{\sigma}^{jl}\bar{\sigma}^{jl}}=\alpha p+k$ に注意すると式 (50) は

$$\begin{aligned} &(\alpha p+k)^2-\{\alpha(\alpha p+k)\bar{\sigma}^{jl}+\bar{\sigma}^{jk}\bar{\sigma}^{lk}\}n_j n_l \\ &\qquad +\bar{\sigma}^{lk}\bar{\sigma}^{jl}n_l n_k n_j n_l=0 \end{aligned} \tag{51}$$

と表せる。

特に平面運動を考えると $\bar{\sigma}^{jl}$ は式 (30) で与えられる。n_l と x 軸とのなす角（＝特性曲面と y 軸とのなす角）を θ とすれば

$$n_l=(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0) \tag{52}$$

となる。式 (30) と式 (52) とを式 (51) へ代入し，式 (31) に注意すると

$$\cos 2\theta(\cos 2\theta-\alpha)=0 \tag{53}$$

となる。式 (32) によりこの解は

$$\theta=\pm\frac{\pi}{4},\quad \pm\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi}{2}\right) \tag{54}$$

となり，x-y 平面の各点を通る特性曲面が2組存在することが分かる。一組は最大せん断力面であり，速度場特有の特性曲面である。他の組は大きい圧縮力の主軸の両側に $\pi/4-\phi/2$ の角をなしており，よく知られた応力の特性曲面である。このことを確認するために不連続量 $P,\ V_l$ を具体的に求めてみる。ただし，それらを定める方程式系は行列式が0であるから，P と V_l との比のみが定まる。式 (45) の第一式に $n_l,\ V_l$ をそれぞれかけて，第二式と $n_l n_l=1$ とを用いると次の式が得られる。

$$\left.\begin{aligned} &\left(-\frac{1}{\alpha}\Lambda^3+\Lambda^2 E_{jl}n_j n_l\right)P \\ &\qquad -\frac{1}{2}\tilde{p}(E_{jl}n_j n_l)(E_{lk}n_l V_k)=0 \\ &\Lambda^2(E_{jl}n_j V_l)P+\frac{1}{2}\Lambda^2\tilde{p}V^2 \\ &\qquad -\frac{1}{2}\tilde{p}(E_{jl}n_j V_l)^2=0 \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

ただし $V=\sqrt{V_l V_l}$ とおいた。第一式より

$$P=-\frac{1}{2}\tilde{p}(E_{jl}n_j n_l)(E_{lk}n_l V_k)\Big/\left(\frac{1}{\alpha}\Lambda^3-\Lambda^2 E_{nm}n_n n_m\right) \tag{56}$$

となり，これを第二式に代入すると

$$E_{jl}n_j V_l=\pm V\sqrt{\Lambda(\Lambda-\alpha E_{jl}n_j n_l)} \tag{57}$$

を得る。これを式 (56) へ代入すれば P が求まり，その結果と式 (57) とを式 (45) の第一式に代入すれば V_l が求まる。結果は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} &P=\pm\frac{\alpha p+k}{2\Lambda}VE_{jl}n_j n_l/\sqrt{\Lambda(\Lambda-\alpha E_{lk}n_l n_k)} \\ &V_l=\mp\frac{\sqrt{\Lambda(\Lambda-\alpha E_{lk}n_l n_k)}}{\Lambda^2} \\ &\qquad V\left(E_{jl}n_j-\frac{\Lambda n_l-\alpha E_{jl}n_j}{\Lambda-\alpha E_{qp}n_q n_p}E_{nm}n_n n_m\right) \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

例えば平面運動の $\theta=\pm\pi/4$ に対応する最大せん断力面では $\bar{\sigma}^{jl}n_j n_l=0$ であり，したがって $E_{jl}n_j n_l=0$ となる。ゆえに式 (58) より $P=0$ となる。ゆえにこれは速度に関する不連続のみを生じ得る面であり，圧力に関する不連続は生じないことが分かる。

5.　変分原理と安息角

構成式 (29) を用いる場合に変分原理による定式化を用いるのが便利である。式 (29) は次のように表せることに注意しよう。

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\sigma}^{jl}=\frac{\partial\Phi}{\partial E_{jl}} \\ &\Phi=(\alpha p+k)\sqrt{2E_{jl}E_{jl}}\,(=\bar{\sigma}^{jl}E_{jl}) \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

ここで Φ は式 (28) の単位体積当たりのエネルギー散逸速度である。流体力学で知られているように，非線形項 $v^k\partial_k v^l$ を変分原理から導くことはできない[48]。非線形項 $v^k\partial_k v^l$ が無視できる定常流では次の定理が成立する。

〔定理〕 V_0 を固定した領域とし，境界 S 上では速度が指定されているか，又は自由表面であるとする。このとき可能な流れは次の Ψ を停留させるものである。

$$\Psi[v_i]=\int_{V_0}[\Phi-p\partial_i v^i-\rho b^i v_i]dV \tag{60}$$

（証明） $v_i\to v_i+\delta v_i$ として Ψ の第一変分をとる。

$$\begin{aligned}\delta\Psi&=\int_{V_0}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial E_{ji}}\delta E_{ji}-p\partial_i\delta v^i-\rho b^i\delta v_i\right]dV\\&=\int_{V_0}[\bar\sigma^{ji}\partial_j\delta v_j-p\partial_i\delta v^i-\rho b^i\delta v_i]dV\\&=\int_S\sigma^{ji}n_j\delta v_i dS-\int_{V_0}(\partial_j\sigma^{ji}+b^i)\delta v_i dV\end{aligned}$$

境界条件に関する仮定と運動方程式，式 (40) 及び非線形項を無視できる定常流の仮定によってこれは 0 となる。

ところで式 (60) の $-p\partial_i v^i$ の項は非圧縮性条件式 (23) を付帯条件とすることによって除くことができる。このとき p が Lagrange 乗数となる。また，境界 S 上のすべての点で速度が指定されており，外力 b^i がポテンシャル力で

$$b^i=-\partial_i\varphi \tag{61}$$

と表せるなら，部分積分により $\partial_i v^i=0$ に注意して

$$\int-\rho b^i v_i dV=\int_{V_0}\rho\partial_i\varphi v_i dV=\int\rho\varphi v_i n_i dS=\text{const.}$$

となるので $-\rho b^i v_i$ の項も除くことができる。結局

$$\int_{V_0}\Phi dV\longrightarrow \text{最小}$$

となる。停留値が最小であることは Φ の形より分かる。これは流体力学で最小散逸の原理とよばれているものにほかならない[48)]。

例として 図-5 のような斜面上の流れを考える。境界条件は $y=0$ で $u=0$, $y=h$ で自由表面とする。y 方向の運動方程式は直ちに積分できて

$$p=\rho g(h-y)\cos\theta \tag{62}$$

となる。このような一方向流れでは非線形項 $v^k\partial_k v^i$ が常に 0 となるので上述の変分原理が厳密に成立する。この場合の汎関数 Ψ は $\partial u/\partial y>0$ として

$$\Psi[u]=\int_0^h\left[\{\alpha\rho g(h-y)\cos\theta+k\}\frac{\partial u}{\partial y}-\rho gu\sin\theta\right]dy \tag{63}$$

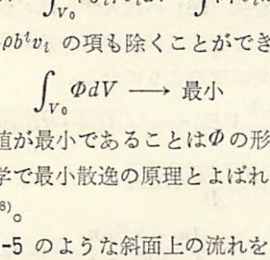

図-5 斜面上の流動

となる。仮に u が解を与えるとする。Aを任意の正定数とするとき Au も u と同じ応力を生じさせる。これは構成式，式 (29) が速度場の 0 次式のためである。ゆえに Au も u と同じ境界条件を満たす。ところが式 (63) は u, $\partial u/\partial y$ の一次汎関数であるから

$$\Psi[Au]=A\Psi[u] \tag{64}$$

となる。ゆえに

$$\Psi[u]=0 \tag{65}$$

でなければならない。もしそうでなければAを適当に選んで u より Au の方がΨを小さくすることができ，u がΨを停留させるという仮定に反するからである。ところで式(63)の形より u が与えられたとき $\Psi=0$ とするような θ が存在する。その θ を θ^* とすれば明らかに $\theta<\theta^*$ なら流れは 0 となり，$\theta>\theta^*$ ではいくらでも速い流れが存在する。ゆえに θ^* は定常流が存在するような動的な安息角であるということができる。計算すれば

$$\theta^*=\tan^{-1}\sin\phi \tag{66}$$

となる。$\theta^*<\phi$ であることに注意しよう。ただし，現在の場合，粘着力 c を一定とすると自由表面の境界条件に適合しないので，表面で c は急速に 0 になると仮定しなければならない。また，流れが完全塑性流動のため，速度場は一意的には定められないことにも注意すべきである。

6. ま と め

本論文では粒状体の運動理論を塑性論の立場から構成することを試みた。要請した条件は，1)三次元テンソル関係式で表現する，2)完全塑性流動である，3)等方性をもち，応力とひずみ速度とが共軸，4)非圧縮流れである，5)関連流動則に従う，6)応力の特性曲面は速度場の特性曲面である，の 6 項である。これまでは Coulomb 則をもとにしてはこれらの条件を同時に満足させることはできないという議論があったが，それらは 5)，6) の解釈に問題があることを指摘した。まず，Drucker の理論は運動に拘束がない場合のものであることを指摘した。そして拘束条件のあるときは拘束応力を除いた散逸応力に関して Drucker の仮説を要求することにより合理的な関連流動則の表現を得た。また，特性曲面の定義を明確にして，不連続との関係を明らかにした。次に，拡張 Mises 則を応力関係式とする非圧縮性流れの構成式を関連流動則より導いた。これは金属塑性論の Levi-Mises の式の拡張である。これに関して特性曲面を解析し，二種類の特性曲面を得た。それは従来から知られているものに一致する。また，それに関する不連続の大きさも計算した。最後に変分原理による定式化を行い，例として斜面上の流れの安定性を考察した。

本研究を行うにあたって御指導いただいた東京大学の

大島信徳教授，いろいろ御助力いただいた東北大学の佐武正雄教授及び九州大学の橋口公一氏に深く感謝します。

参 考 文 献

1) 最上武雄（編）(1969)：「土質力学」，技報堂.
2) 橋口公一 (1978)：土の構成式に関する現況総括 7. 弾塑性論的アプローチ，「土質工学会論文報告集」，Vol. 18, No. 4, pp. 131～142.
3) Sokolovskii, V. V. (1965) : Statics of Granular Media, Oxford, Pergamon Press.
4) 山口柏樹 (1959)：拡張せる Kötter の方程式に関する二，三の考察，「土木学会論文集」，Vol. 60, pp. 11～19.
5) 山口柏樹 (1959)：摩擦性塑性体のこり線の幾何学，「土木学会論文集」，Vol. 61, pp. 1～9.
6) 龍岡文夫 (1978)：粒状体力学の現状とその応用 2. 粒状体の変形に関する理論的研究について I（塑性論的研究），「土と基礎」，Vol. 26, No. 6, pp. 82～89.
7) Drucker, D. C. and Prager, W. (1952): "Soil mechanics and plastic analysis of limit design," Q. Appl. Math., Vol. 10, No. 2, pp. 157-165.
8) Shield, R. T. (1953) : "Mixed boundary value problems in soil mechanics," Q. Appl. Math., Vol. 11, No. 1, pp. 61-75.
9) Shield, R. T. (1954) : "Stress and velocity fields in soil mechanics," J. Math. Phys. Vol. 33, pp. 144-156.
10) Shield, R. T. (1955) : "On Coulomb's law of failure in soils," J. Mech. Phys. Solids., Vol. 4, pp. 10-16.
11) 山口柏樹 (1959)：塑性流動における速度場の理論，「土木学会論文集」，Vol. 63, pp. 8～16.
12) 橋口公一 (1969)：摩擦性塑性体に関する速度場の理論，「土木学会論文報告集」，Vol. 172, No. 12, pp. 19～30.
13) Spencer, A. J. M. (1964) : "A theory of the kinematics of ideal soils under plane strain conditions," J. Mech. Phys., Vol. 12, pp. 337-351.
14) Mandel, P. J. (1966) : "Sur les equations découlement des sols ideaux en deformation plane et le concept du double glissement," J. Mech. Phys. Solids, Vol. 14, pp. 303-308.
15) Mandl, G. and Fernández Luque, R. (1970) : "Fully developed plastic shear flow of granular materials," Géotechnique, Vol. 20, No. 3, pp. 277-307.
16) de Josselin de Jong, G. (1971) : "The double sliding, free rotating model for granular assemblies," Géotechnique, Vol. 21, pp. 155-163.
17) 橋口公一 (1971)：一般膨張性摩擦塑性体に関する速度場の理論，「土木学会論文報告集」，Vol. 185, No. 1, pp. 21～30.
18) Morrison, H. L. and Richmond, O. (1976) : "Applications of Spencer's ideal soil model to granular materials flow," Trans. ASME, E, Vol. 43, pp. 49-53.
19) Goodman, M. A. and Cowin, S. C. (1971) : "Two problems in the gravity flow of granular materials," J. Fluid Mech., Vol. 45, pp. 321-339.
20) Goodman, M. A. and Cowin, S. C. (1972) : "A continuum theory for granular materials," Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 44, pp. 249-266.
21) Cowin, S. C. (1974) : "A theory for the flow of granular materials," Powder Technol., Vol. 9, pp. 61-69.
22) Cowin, S. C. and Satake, M. (ed.) (1978) : Proc. U. S.-Japan Seminar on Continuum Mechanical and Statistical Approaches in the Mechanics of Granular Materials, Sendai, 1978, Tokyo, Gakujutsu Bunken Fukyukai.
23) 金谷健一 (1979)：粒状体の流動の基礎理論(第1報)，「日本機械学会論文集」，Vol. 45-392-B, pp. 507～514.
24) 金谷健一 (1979)：粒状体の流動の基礎理論(第2報)，「日本機械学会論文集」，Vol. 45-392-B, pp. 515～522.
25) 金谷健一 (1979)：粒状体の流れ特性の研究，「粉体工学会誌」，Vol. 16, No. 8, pp. 445～452.
26) Drucker, D. C. (1952): "A more fundamental approach to plastic stress-strain relations," Proc., 1st U. S. National Congress of Applied Mechanics, New York, ASME, pp. 487-491.
27) Drucker, D. C. (1959) : "A definition of stable inelastic material," Trans. ASME, E, Vol. 26, No. 3, pp. 101-106.
28) Drucker, D. C. (1953) : "Limit analysis of two and three dimensional soil mechanics problems," J. Mech. Phys. Solids, Vol. 1, pp. 217-226.
29) Drucker, D. C., Gibson, R. E. and Henkel, D. J. (1957) : "Soil mechanics and work-hardening theories of plasticity," Trans. ASCE, Vol. 122, pp. 338-346.
30) Jenike, A. W. and Shield, R. T. (1959) : "On the plastic flow of Coulomb solids beyond original failue," Trans. ASME, E, Vol. 26, No. 12, pp. 599-602.
31) Jenike, A. W. (1964) : "Steady gravity flow of frictional-cohesive solids in converging channels," Trans. ASME, E, Vol. 31, No. 3, pp. 5-11.
32) Takagi, S. (1962) : "Plane plastic deformation of soils," Proc., ASCE, EM 3, Vol. 88, pp. 107-151.
33) Hythornthwaite, R. M. (1963) : Progress in Applied Mechanics, the Prager Aniversary Volume, New York, Macmillan, pp. 235-250.
34) Davis, E. H. (1968) : Soil Mechanics Selected Topics (ed. by I. K. Lee), London, Butterworths, pp. 341-380.
35) Hill, R. (1950) : The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford, Clarendon Press.
36) Taylor, G. I. (1938) : "Plastic strain in metals," J. Inst. Met., Vol. 62, pp. 307-324.
37) Bishop, J. F. W. and Hill, R. (1951) : "A theory of the plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses," Phil. Mag., Vol. 42, pp. 414-427.
38) Bishop, J. F. W. and Hill. R. (1951) : "A theoretical derivation of the plastic properties of a polycrystalline face-centered metal," Phil. Mag., Vol. 42, pp. 1298-1308.
39) Bishop, J. F. W. (1953) : "A theoretical examination of the plastic deformation of crystals by glide," Phil. Mag., Vol. 44, pp. 51-64.
40) 大久保忠恒 (1968)：すべり変形する立方金属の拘束条件下の塑性変形，「塑性と加工」. Vol. 9, No. 93, pp. 681～690.
41) Il'iushin, A. A. (1960) : "On the increments of plastic deformations and the yield surface," PMM, Vol. 24, No. 4, pp. 663-666.
42) Green, A. E. and Naghdi, P. M. (1965) : "A general theory of an elastic-plastic continuum," Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 18, pp. 251-281.
43) 橋口公一 (1978)：弾・塑性遷移過程の表現，「日本機械学会講演論文集」，No. 780-3, pp. 105～112.
44) Drucker, D. C. (1954) : "Coulomb friction, plasticity

and limit loads," J. Appl. Mech., Vol. 21, pp. 71-74.
45) Thomas, T. Y. (1961) : Plastic Flow and Fracture in Solids, New York, Academic Press.
46) Matsuoka, H. and Nakai, T. (1974) : "Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses," Proc., JSCE, No. 232, pp. 59-70.
47) Hill, R. (1961) : "Discontinuity relations in mechanics of solids," Progress in Solid Mechanics, Vol. 2 (ed. by I. N. Sneddon and R. Hill) Amsterdam, North-Holland Publishing Company, pp. 247-278.
48) Finlayson, B. A. (1972) : The Method of Weighted Residuals and Variational Principle, New York, Academic Press.

付録 不連続適合条件

不連続面の単位法線を$\boldsymbol{n}$とし，面上に曲線座標系$\{x^\alpha\}$ $(\alpha=1, 2)$ をとる。空間の座標は直交座標 $\{x^i\}$ $(i=1, 2, 3)$ とする。面上に $\{x^\alpha\}$ の自然基底 $\{e_\alpha\}$ をとる (図-6)。その空間座標$\{x^i\}$に関する成分を$e_\alpha{}^i$とすれば

$$e_\alpha{}^i=\frac{\partial x^i}{\partial x^\alpha} \tag{67}$$

である。この基底の相反基底を $\{e^\alpha\}$ とする。すなわち

$$e_\alpha=g_{\beta\alpha}e^\beta, \quad e^\alpha=g^{\alpha\beta}e_\beta \tag{68}$$

$$e_\beta\cdot e^\alpha=\delta_\beta{}^\alpha \tag{69}$$

ただし $g^{\beta\alpha}$ は $g_{\alpha\beta}$ の逆行列であり

$$g_{\beta\alpha}=e_\beta\cdot e_\alpha \tag{70}$$

はこの曲面の第一基本テンソルである。この面上の点における空間偏微分 ∂_i は法線方向微分 ∂_n と面内微分 ∂_α とに分解できて

$$\partial_i=e_i{}^\alpha\partial_\alpha+n_i\partial_n \tag{71}$$

と表せる。ただし $e_i{}^\alpha$ は相反基底 e^α の $\{x^i\}$ に関する成分である。

さて，任意の量Zに対して

$$[\partial_\alpha Z]=\partial_\alpha[Z] \tag{72}$$

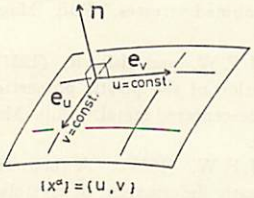

図-6 面内曲線座標系とその自然基底及び単位法線からなる標構

が成立する (Hadamard の補題)。これは容易に示すことができる。面上に隣接する二点 P, Q をとり，それに極めて近い + 側の点と − 側の点とをそれぞれ P^+, Q^+, P^-, Q^- とすれば

$$\{Z(Q^+)-Z(P^+)\}-\{Z(Q^-)-Z(P^-)\}$$
$$=\{Z(Q^+)-Z(Q^-)\}-\{Z(P^+)-Z(P^-)\} \tag{73}$$

である。両辺を線分 PQ の長さで割り P^+, Q^+, P^-, $Q^-\to P$の極限を考えれば式 (72) は明らかである。したがって式 (71) に Hadamard の補題を適用して一次の不連続適合条件

$$[\partial_i Z]=e_i{}^\alpha\partial_\alpha[Z]+n_i[\partial_n Z] \tag{74}$$

を得る。また式 (71) を二度繰り返して，

$$\left.\begin{aligned}\partial_\gamma e^\beta&=-\begin{Bmatrix}\beta\\ \gamma\alpha\end{Bmatrix}e^\alpha+H_\gamma{}^\beta\boldsymbol{n}\quad(\text{Gauss の公式})\\ \partial_\gamma\boldsymbol{n}&=-H_{\beta\alpha}e^\alpha\quad(\text{Weingarten の公式})\end{aligned}\right\} \tag{75}$$

を用いれば

$$\begin{aligned}\partial_j\partial_i=&e_j{}^\beta e_i{}^\alpha(\nabla_\beta\nabla_\alpha-H_{\beta\alpha}\partial_n)\\ &+2e^\alpha{}_{(j}n_{i)}(\nabla_\alpha\partial_n+H_\alpha{}^\beta\nabla_\beta)+n_jn_i\partial_n\partial_n\end{aligned} \tag{76}$$

を得る。ただし $\begin{Bmatrix}\alpha\\ \gamma\beta\end{Bmatrix}$ は $g_{\beta\alpha}$ に関する Christofell 記号

$$\begin{Bmatrix}\alpha\\ \gamma\beta\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(\partial_\gamma g_{\beta\sigma}+\partial_\beta g_{\gamma\sigma}-\partial_\sigma g_{\gamma\beta}) \tag{77}$$

であり，$H_{\beta\alpha}$ はこの曲面の第二基本テンソル

$$H_{\beta\alpha}=\boldsymbol{n}\cdot\partial_\beta e_\alpha(=\boldsymbol{n}\cdot\partial_\alpha e_\beta) \tag{78}$$

である。また ∇_α は $\begin{Bmatrix}\alpha\\ \gamma\beta\end{Bmatrix}$ に関する共変微分を示す。式 (76) に Hadamard の補題を適用して二次の不連続適合条件

$$\begin{aligned}[\partial_j\partial_i Z]=&e_j{}^\beta e_i{}^\alpha(\nabla_\beta\nabla_\alpha[Z]-H_{\beta\alpha}[\partial_n Z])\\ &+2e^\alpha{}_{(j}n_{i)}(\nabla_\alpha[\partial_n Z]+H_\alpha{}^\beta\nabla_\beta[Z])\\ &+n_jn_i[\partial_n\partial_n Z]\end{aligned} \tag{79}$$

を得る。式 (74), (79) を用いれば二次までの導関数の不連続はすべて $[Z]$, $[\partial_n Z]$, $[\partial_n\partial_n Z]$ によって表せる。特に $[Z]=0$ であれば式 (74) より

$$[\partial_i Z]=n_i[\partial_n Z] \tag{80}$$

であり，$[Z]=0$, $[\partial_n Z]=0$ であれば式 (79) より

$$[\partial_j\partial_i Z]=n_jn_i[\partial_n\partial_n Z] \tag{81}$$

となる。

(原稿受付，1978. 11. 6)