

# 粒状体の速度場の理論

## —ダイレイタンスーと硬化—

### (A Theory for the Velocity Field of Granular Materials) —Dilatancy and Hardening—

金 谷 健 一\* (Ken-ichi Kanatani)

キーワード：塑性／ダイレイタンスー／土の構成式  
／土質力学／変形／粒状体 (IGC : D 6/E 0)

#### 1. 土質力学における塑性論の役割

土質力学において静的な場の極限応力解析の歴史は古いが、土の変形に対して塑性力学理論を本格的に試みたのは Drucker-Prager<sup>1)</sup> が最初であろう。その理論は後に何度も批判されたが、その論点は大別して次の二つである。第一点はその力学的根拠に関する疑問、特に関連流動則の適用可能性であり、第二点は予測されるダイレイタンスーが大きすぎることである。しかし、それにもかかわらず、この理論が後の人々に大きな影響を与え、現在でもさまざまな形で応用されているのは、その取扱いが単純であるためであろう。理論に含まれる未知定数は内部摩擦角 $\phi$ と粘着力 $c$ のみである。土質力学では精密性よりむしろ実用性に重点をおくことが多いから、力学的根拠はどうあれ、ともかく $\phi$ と $c$ を与えればダイレイタンスーを含めた土の変形が完全に定まってしまうというのは大きな利点である。これは十分評価すべきことであろう。

その後の発展は上述の二点に関連している。第一点に関しては、土のような内部摩擦をもつ物質では関連流動則の成立しないことが早くから明らかにされていた<sup>2), 3)</sup>。そして、関連流動則によらない、力学理論として一貫した体系を目指す研究が試みられた。例えば Spencer<sup>4)</sup> らの二重すべり理論、Goodman-Cowin<sup>5)</sup> らの充てん率勾配変数の導入、金谷<sup>6)</sup> の極性連続体理論の応用などがある。第二点に関しては、力学的根拠はともかくとして、実験結果と一致する理論が追求された。例えば降伏条件とは別の塑性ポテンシャルを考えたり、時間効果などのいろいろな補正項を加えたりしている。そして、それらの形として、べき乗則や指数関数、対数関数のいろいろな組合せが考えられている<sup>7)-9)</sup>。

いずれにしても、精密な結果を望むほど理論がそれだけ複雑になり、Drucker-Prager 理論の単純さの利点から遠ざかる。ここで「複雑」というのは式の形が長かったり、こみ入っているという意味ではない。近年、解析に計算機を用いることが多くなっているから、その点はあまり障害にならない。ここでいう「複雑」とは実験と対応させて定めるべき未知定数、更には未知関数の数が多くなるという意味である。

さて、前報<sup>10), 11)</sup>では Drucker-Prager 理論の単純さを保持しながらその力学的根拠を再検討し、力学的に一貫した理論を追求した。その結果明らかになったことは、運動に内部拘束のあるときは関連流動則がそのままの形では成立しないが、拘束応力以外の応力成分については成立するということである。そこで、体積一定の拘束条件のもとに関連流動則を適用し、運動の方程式を導き、特性曲面、運動の安定性、波動の伝ばなどを調べた。これは砂質土が臨界状態を経て、滑らかな流動状態に移行した後を記述する理論とみなすことができる。この理論に含まれる未知定数は $\phi$ と $c$ のみである。

本報では、前報で扱わなかった、しかし土質力学ではより重要な、ダイレイタンスーを伴う初期の変形を同じ原理によって研究する。微視的にみるとダイレイタンスーは粒子配列の“無秩序化”によって生ずるものであるから、粒子配列のエントロピー<sup>12)</sup>を導入することもできるが、本報では巨視的連続体力学の枠内で、前報の理論にもうひとつの定数、ダイレイタンスー率 $\beta$ を導入しさえすれば力学的に一貫した方程式系が得られることを示す。これは Drucker-Prager 理論の単純さを保ち、力学的に一貫性を持ち、しかも $\beta$ の導入により理論の適用範囲を一層広げるものである。更に硬化の導入や弾塑性変形への拡張も与える。すべての方程式は座標変換に不変な三次元テンソル関係式<sup>13), 14)</sup>によって記述する。特徴的なのは、等方性理論でありながら、応力とひずみとの非共軸性が現れることである。もちろん、これは力学的に何の矛盾でもない<sup>15)</sup>。

\* 群馬大学工学部情報工学科 助手 (桐生市天神町 1-5-1)  
(1981. 5. 21 原稿受付・討議期限 1983. 4. 1)

2. 内部拘束条件と修正関連流動則

前報<sup>10),11)</sup>で新しい塑性仕事の原理より導いた新たな関連流動則の幾何学的意味を考える。ひずみテンソルを  $e_{ji}$  とするとき、何らかの拘束条件があって変形が制約される場合を考える。例えば体積一定の条件であれば

$$e_{kk} = 0 \tag{1}$$

と書ける。一般に拘束条件が

$$F(e_{ji}) = 0 \tag{2}$$

の形で表される場合を考える。これはひずみテンソル  $e_{ji}$  の空間の中の超曲面を与えるものであり、可能なひずみはこの超曲面上に拘束されている。次に、このような拘束条件に対する“拘束応力”を考える。拘束応力とはその拘束を満たす変形に対して仕事をせず、その拘束を破ろうとする仮想変形に対してのみ仕事をする応力の成分である。いま、微小変形  $e_{ji} \rightarrow e_{ji} + de_{ji}$  が拘束を満たす変形であるとする

$$F(e_{ji}) = F(e_{ji} + de_{ji}) = 0 \tag{3}$$

であるから

$$\frac{\partial F}{\partial e_{ji}} de_{ji} = 0 \tag{4}$$

である。以下、前報<sup>10),11)</sup>と同様に、ベクトル、テンソルは正規直交座標系に関する成分表示によるものとし、指標の総和規約を用いる。式(4)は  $\partial F/\partial e_{ji}$  が超曲面  $F(e_{ji})=0$  のその点での“法線ベクトル”であることを意味している。現在の応力を  $\sigma_{ji}$  とし、その拘束応力の部分を  $\sigma_{ji}^c$  とすれば、これは上述の変形に対して仕事をしないから、

$$\sigma_{ji}^c de_{ji} = 0 \tag{5}$$

である。式(4)と式(5)とを比較すれば、応力空間とひずみ空間の成分ごとに対応する座標軸を重ねた場合、 $\sigma_{ji}^c$  は応力  $\sigma_{ji}$  を  $\partial F/\partial e_{ji}$  方向に“射影した成分”であることが分かる。これを求めるため  $\partial F/\partial e_{ji}$  に定数をかけて規格化したものを  $n_{ji}$  とする。(  $n_{ji}n_{ji}=1$  となるようにする。) 応力  $\sigma_{ji}$  の“単位ベクトル”  $n_{ji}$  方向の成分の大きさは

$$\xi = \sigma_{ji} n_{ji} \tag{6}$$

である。したがって、拘束応力が一定の領域は応力空間の中の超平面であり、式(6)がその方程式である。拘束応力  $\sigma_{ji}^c$  はこの超平面に下ろした“垂線の足”であり

$$\sigma_{ji}^c = \xi n_{ji} \tag{7}$$

となる(図-1)。式(6)、(7)で定まる  $\xi$  や  $\sigma_{ji}^c$  は一般に応力  $\sigma_{ji}$  のみならずひずみ  $e_{ji}$  の関数でもある。これは拘束が“曲面”のとき、各ひずみの状態ごとにその点での曲面の“向き”が異なるためである。しかし、例えば式(1)の体積一定の条件であれば

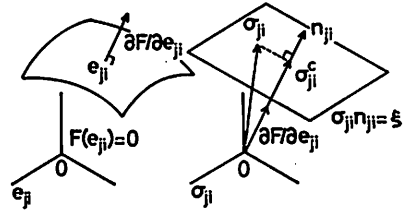


図-1 ひずみの拘束曲面と拘束応力および拘束応力一定の平面

$$F(e_{ji}) = e_{kk} \tag{8}$$

であり、これはひずみ空間の超平面を与える。その“法線方向”は  $\partial F/\partial e_{ji} = \delta_{ji}$  (Kronecker のデルタ) であるから、“単位法線ベクトル”は

$$n_{ji} = \delta_{ji} / \sqrt{3} \tag{9}$$

であり、拘束応力の大きさは

$$\xi = \sigma_{kk} / \sqrt{3} (= -\sqrt{3} p) \tag{10}$$

である。ただし  $p = -\sigma_{kk}/3$  は平均圧縮主応力である。したがって拘束応力は

$$\sigma_{ji}^c = -p \delta_{ji} \tag{11}$$

となる。これが、そしてこれのみが体積一定の変形に対して仕事をしない応力であることは明らかである<sup>14)</sup>。

次に降伏条件を

$$f(\sigma_{ji}) = 0 \tag{12}$$

とする。これも応力空間の超曲面を与え、塑性状態での応力はこの超曲面上に拘束されている。ここで、応力空間に新しい正規直交座標系をとり、そのひとつの座標軸が  $n_{ji}$  に一致するようにする。そして、残りの座標軸に関する応力の成分を  $\sigma_{\beta\alpha}$  とする。これにより降伏条件を

$$f(\sigma_{\beta\alpha}, \xi) = 0 \tag{13}$$

の形に書き直す。このとき、前報<sup>10)</sup>の結論は、塑性ひずみ速度が

$$\dot{e}_{ji}^p = \lambda \left. \frac{\partial f(\sigma_{\beta\alpha}(\sigma_{ji}), \xi)}{\partial \sigma_{ji}} \right|_{\xi = \text{const.}} \tag{14}$$

で与えられるということであった。ただし  $\lambda$  はスカラー量である。もし体積一定の拘束条件なら、式(10)より  $\xi$  は  $p$  とみなしてもよく、またテンソル不変分解の直交性<sup>15)</sup>より、 $\sigma_{\beta\alpha}$  は偏差応力テンソル

$$\bar{\sigma}_{ji} = \sigma_{ji} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ji} \tag{15}$$

とみなしてもよい(  $\bar{\sigma}_{ji} \delta_{ji} = 0$  であるから  $\bar{\sigma}_{ji}$  と  $\delta_{ji}$  とは“直交”している)。

以上のことを幾何学的に述べると次のようになる。応力空間の降伏曲面  $f(\sigma_{ji})=0$  上の現在の応力状態を  $\sigma_{ji}$  とするとき、この点を通り、 $n_{ji}$  を“法線ベクトル”とする拘束応力が一定の超平面を考える。式(14)の塑性ひずみ速度  $\dot{e}_{ji}^p$  はこの超平面に平行であり、この超平面と降伏曲面との“交線”に垂直である(図-2)。したが

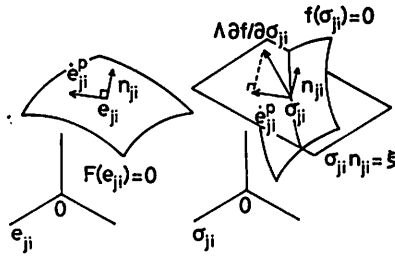


図-2 修正閏連流動則の幾何学的解釈

って、 $\dot{e}_{ji}^p$  を求めるのに式 (14) によらず、まず降伏曲面  $f(\sigma_{ji})=0$  の“法線ベクトル”  $\partial f/\partial \sigma_{ji}$  を求め、これを前述の超平面に“射影”すればよい。こうして得られたひずみ速度  $\dot{e}_{ji}^p$  はひずみ空間では、ひずみの拘束曲面  $F(e_{ji})=0$  の現在のひずみ  $e_{ji}$  における“接線ベクトル”であることが分かる。これは拘束条件を破らない変形を生じるためには当然のことでもある。

以上が前報<sup>10)</sup>で得られた修正閏連流動則あるいは修正垂直則の幾何学的解釈である。前報<sup>11),12)</sup>ではこれを体積一定の拘束条件に適用して場の方程式系を導き、特性曲面、運動の安定性、弾塑性変形、波動の伝ばなどを調べた。

### 3. ダイレイタンスー拘束条件と塑性ひずみ速度

元来、塑性論は金属を対象として考えられたものであり、閏連流動則は微視的なすべりに起因した変形の巨視的表現である。したがって、そこには体積一定という拘束がある。これはあまりに当然なため、金属塑性論では特に強調されることがなかった。このことを土のような粒状体にあてはめると、粒子間のすべりに起因する塑性ひずみ、したがって体積一定のひずみのみが閏連流動則から導かれるべきである。これが前報の結論であった。一方、ダイレイタンスーは土の内部の粒子が互いに接触しているという幾何学的要因に基づくものであり、したがって変形の内部拘束と考えるべきものである。これは内部の粒子の充てん状態によって決まるものであるが、その充てん状態は土の種類のみならず、過去の変形や荷重の履歴にも依存するため、極めて複雑な現象となっている。ここでは簡単のため与えられた初期状態に対して荷重を加えた場合に限ることにし、変形は微小であり、除荷は考えないとする。すると、この範囲でせん断ひずみ  $\gamma_0$  と体積ひずみ  $v$  とはほぼ比例しているとみなしてよいであろう。そこで

$$v = \beta \gamma_0 \quad (16)$$

とおき、 $\beta$  をダイレイタンスー率とよぶことにする。 $\beta$  は初期状態での土の種類や粒子の充てん状態、したがっ

て過去に受けた履歴にも関係する定数であり、正(膨張)でも負(収縮)でもよい(式 (16) のかわりにより複雑な式を用いても以下の議論は同様に行える。式 (16) で十分かどうかは本理論の適用の対象に即して考えるべき問題である)。一般の変形に対して式 (16) をテンソル式で表すと、

$$v = e_{kk}, \quad \tau_0 = \sqrt{\bar{e}_{ji} \bar{e}_{ji}}/2 \quad (17)$$

である。ただし

$$\bar{e}_{ji} = e_{ji} - \frac{1}{3} e_{kk} \delta_{ji} \quad (18)$$

は偏差ひずみテンソルであり、せん断変形を表すテンソルである<sup>13)</sup>。したがって、ひずみの拘束条件は

$$e_{kk} = \beta \sqrt{\bar{e}_{ji} \bar{e}_{ji}}/2 \quad (19)$$

であり、

$$F(e_{ji}) = e_{kk} - \beta \sqrt{\bar{e}_{ji} \bar{e}_{ji}}/2 \quad (20)$$

である。拘束超曲面の“単位法線ベクトル”は

$$n_{ji} = \frac{1}{\sqrt{3 + \beta^2/2}} \left( \delta_{ji} - \frac{\beta^2}{2} \frac{\bar{e}_{ji}}{e_{kk}} \right) \quad (21)$$

である。拘束応力の大きさは次のとおりである。

$$\xi = -\sqrt{3} \left( p + \frac{\beta^2}{6} \frac{\bar{\sigma}_{ji} \bar{e}_{ji}}{e_{kk}} \right) \quad (22)$$

次に降伏条件として、前報<sup>10),11)</sup>で用いた、Drucker-Prager 理論と同じ拡張 von Mises 則

$$\sqrt{\bar{\sigma}_{ji} \bar{\sigma}_{ji}}/2 = \alpha p + k \quad (23)$$

を用いる。すなわち

$$f(\sigma_{ji}) = \sqrt{\bar{\sigma}_{ji} \bar{\sigma}_{ji}}/2 - \alpha p - k \quad (24)$$

とする。この降伏超曲面の“法線ベクトル”は

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ji}} = \frac{\bar{\sigma}_{ji}}{2(\alpha p + k)} + \frac{\alpha}{3} \delta_{ji} \quad (25)$$

である。この拘束超曲面  $F(e_{ji})=0$  の“単位法線ベクトル”  $n_{ji}$  方向への成分は

$$n_{ji} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ji}} = \frac{1}{\sqrt{3 + \beta^2/2}} \left( \alpha - \frac{\beta^2}{4} \frac{\bar{\sigma}_{ji} \bar{e}_{ji}}{(\alpha p + k) e_{kk}} \right) \quad (26)$$

となる。 $\dot{e}_{ji}^p$  は  $\partial f/\partial \sigma_{ji}$  の、この拘束超曲面の接線方向の成分に比例するから

$$\dot{e}_{ji}^p \propto \partial f/\partial \sigma_{ji} - (n_{ik} \partial f/\partial \sigma_{ik}) n_{ji} \quad (27)$$

となる。これを偏差部分とスカラー部分とに分けると

$$\dot{e}_{ji}^p = A \left[ \frac{1 + \beta^2/2}{2} \frac{\bar{\sigma}_{ji}}{\alpha p + k} + \left( \alpha - \frac{\beta^2}{4} \frac{\bar{\sigma}_{ik} \bar{e}_{ik}}{(\alpha p + k) e_{mm}} \right) \frac{\bar{e}_{ji}}{e_{nn}} \right] \quad (28)$$

$$\dot{e}_{kk}^p = A \left[ \alpha + \frac{3}{2} \frac{\bar{\sigma}_{ji} \bar{e}_{ji}}{(\alpha p + k) e_{kk}} \right] \quad (29)$$

となる。ただし  $A$  はスカラー量である。この式に従えばひずみの拘束条件 (19) が常に満たされることは容易に確かめられる。

#### 4. 完全塑性変形の方程式

硬化や弾性ひずみを考えない完全塑性変形の場合の方程式系は次のようになる。まず連続の方程式が

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + \rho \partial_i v_i = 0 \quad (30)$$

であり、運動方程式が

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \partial_j \sigma_{ji} + \rho b_i \quad (31)$$

となる。ただし  $\rho$  は密度、 $v_i$  は速度、 $b_i$  は単位質量当たりの外力である。また  $\partial_i = \partial/\partial x_i$  であり、 $d/dt = \partial/\partial t + v_i \partial_i$  は Lagrange 微分である。一方、応力  $\sigma_{ji}$  は降伏条件

$$\sqrt{\bar{\sigma}_{ji} \bar{\sigma}_{ji}}/2 = \alpha p + k \quad (32)$$

を満たさなければならない。また、ひずみはすべて塑性ひずみであるから

$$\dot{e}_{ji} = A \left[ \frac{1+6/\beta^2}{2} \frac{\bar{\sigma}_{ji}}{\alpha p + k} + \left( \alpha - \frac{\beta^2}{4} \frac{\bar{\sigma}_{ik} \bar{\sigma}_{lk}}{(\alpha p + k) e_{mm}} \right) \frac{\bar{e}_{ji}}{e_{nn}} \right] \quad (33)$$

$$\dot{e}_{kk} = A \left[ \alpha + \frac{3}{2} \frac{\bar{\sigma}_{ji} \bar{e}_{ji}}{(\alpha p + k) e_{kk}} \right] \quad (34)$$

となる。方程式 (30)~(34) は計 11 個の方程式を与える。一方、未知変数は  $\rho, u_i, \sigma_{ji}, A$  の計 11 個であり、他の量はこれらを用いて直接に表すことができる。ただし  $u_i$  は変位である。例えば微小変形であると  $v_i = \partial u_i / \partial t$ ,  $e_{ji} = \partial_j u_i$ ,  $\dot{e}_{ji} = \partial_j v_i$  等である。ただし ( ) は指標の対称化を表す (注意。ドット・は本来何らかの時間微分を意味しているのではなく、ひずみ速度という量を  $\dot{e}_{ji}$  と書いているのである。その定義は  $\dot{e}_{ji} = \partial_j v_i$ ) であり、これは微小変形、有限変形に無関係である。一方、有限変形のとときは変位  $u_i$  やひずみ  $e_{ji}$  をどう定義するかが問題となり、それらの定義ごとにドットの解釈も異なる。本論文では微小変形のみを考えているが、以下、有限変形でも成り立つ式はなるべく一般の形のままで書くことにする)。未知変数の数と方程式の数とが一致するから、これらを適当な初期条件、境界条件のもとに解けば解が定まる。このとき、ダイレイタンスー拘束条件

$$e_{kk} = \beta \sqrt{\bar{e}_{ji} \bar{e}_{ji}}/2 \quad (35)$$

は自動的に満たされる。

#### 5. 硬化塑性変形の方程式

更に硬化 (軟化も含む) を導入することを考える。最も簡単なものとして等方硬化則

$$\sqrt{\bar{\sigma}_{ji} \bar{\sigma}_{ji}}/2 = \alpha(e) p + k(e) \quad (36)$$

を採用する。ただし  $e$  は間隙比であり、降伏条件の定数

$\alpha, k$  が間隙比  $e$  によって変化すると考えるのである。これは硬化が粒子の充てん構造の変化によって生ずることを考慮したためである。Hill<sup>16)</sup> 流の金属塑性論では硬化をそれまでになされた仕事量によって表しているが、これは金属の硬化が内部の転位の配置の変化によるものであることを考慮するためであり、粒状体には必ずしも適切でないと思われる。式 (36) の両辺を Lagrange 微分して  $de/dt$  について解けば

$$\frac{de}{dt} = \frac{\alpha p + k}{\alpha' p + k'} \left[ \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{ji} \frac{d\bar{\sigma}_{ji}}{dt} - \alpha(\alpha p + k) \frac{dp}{dt} \right] \quad (37)$$

となる。ただし  $\alpha' = d\alpha/de$ ,  $k' = dk/de$  とおいた。一方、弾性ひずみを考えなければ、粒子部分の占める体積は一定であるから

$$\dot{e}_{kk} = \frac{1}{1+e} \frac{de}{dt} \quad (38)$$

の関係がある。これと式 (34) とを等置すれば  $A$  が定まり

$$A = \frac{\alpha p + k}{(1+e)(\alpha' p + k')} \frac{(1/2) \bar{\sigma}_{ji} d\bar{\sigma}_{ji}/dt - \alpha(\alpha p + k) dp/dt}{\alpha + \frac{3}{2} \frac{\bar{\sigma}_{ik} \bar{e}_{lk}}{(\alpha p + k) e_{mm}}} \quad (39)$$

となる。以上より、得られた方程式はまとめると

$$\dot{e}_{ji} = A \left[ \frac{1+6/\beta^2}{2} \frac{\bar{\sigma}_{ji}}{\alpha p + k} + \left( \alpha - \frac{\beta^2}{4} \frac{\bar{\sigma}_{ik} \bar{\sigma}_{lk}}{(\alpha p + k) e_{mm}} \right) \frac{\bar{e}_{ji}}{e_{nn}} \right] \quad (40)$$

$$\dot{e}_{kk} = \frac{\alpha p + k}{(1+e)(\alpha' p + k')} \left[ \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{ji} \frac{d\bar{\sigma}_{ji}}{dt} - \alpha(\alpha p + k) \frac{dp}{dt} \right] \quad (41)$$

$$de/dt = (1+e) \dot{e}_{kk} \quad (42)$$

の計 7 個である。ただし式 (40) の  $A$  は式 (39) を用いる。これに式 (30), (31) の連続の方程式、運動方程式を合わせた計 11 個が必要な方程式系であり、未知変数は  $\rho, u_i, \sigma_{ji}, e$  の計 11 個である。これから解が定まり、その解は降伏条件 (36) とダイレイタンスー拘束条件 (35) を自動的に満足する。

#### 6. 弾塑性変形の方程式

硬化に加え、更に弾性ひずみも考慮してみる。まず全ひずみ速度  $\dot{e}_{ji}$  を弾性部分  $\dot{e}_{ji}^e$  と塑性部分  $\dot{e}_{ji}^p$  とに分けて

$$\dot{e}_{ji} = \dot{e}_{ji}^e + \dot{e}_{ji}^p \quad (43)$$

とする。ただし、この分解は、応力  $\sigma_{ji}$  が弾性ひずみ速度  $\dot{e}_{ji}^e$  のみによって変化するように行うものとする。その関係式としては簡単のため前報と同様に線形等方性

$$\frac{D\sigma_{jt}}{Dt} = 2\mu\dot{e}_{jt}^0 + \lambda\delta_{jt}\dot{e}_{kk}^0 \quad (44)$$

とおく。ただし  $\mu, \lambda$  は定数であり、 $D/Dt$  は Jaumann 微分

$$\frac{D\sigma_{jt}}{Dt} = \frac{\partial\sigma_{jt}}{\partial t} + v_k\partial_k\sigma_{jt} - \sigma_{jk}\partial_{[k}v_{j]} - \sigma_{ik}\partial_{[k}v_{j]} \quad (45)$$

を表す<sup>11)</sup>。ここに  $[ ]$  は指標の反対称化を表す。式(44)を偏差部分とスカラー部分とに分ければ<sup>14)</sup>

$$\frac{D\bar{\sigma}_{jt}}{Dt} = 2\mu\dot{\bar{e}}_{jt}^0 = 2\mu(\dot{\bar{e}}_{jt} - \dot{\bar{e}}_{jt}^p) \quad (46)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\kappa\dot{e}_{kk}^0 = -\kappa(\dot{e}_{kk} - \dot{e}_{kk}^p) \quad (47)$$

となる。ただし  $\kappa = (2\mu + 3\lambda)/3$  とおいた。これに式(28), (29)を代入すると

$$\frac{D\sigma_{jt}}{Dt} = 2\mu\left[\dot{\bar{e}}_{jt} - A\left\{\frac{1+6/\beta^2}{2}\frac{\bar{\sigma}_{jt}}{\alpha p+k} + \left(\alpha - \frac{\beta^2}{4}\frac{\bar{\sigma}_{ik}\bar{e}_{ik}}{(\alpha p+k)e_{mm}}\right)\frac{\bar{e}_{jt}}{e_{nn}}\right\}\right] \quad (48)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\kappa\left[\dot{e}_{kk} - A\left\{\alpha + \frac{3}{2}\frac{\bar{\sigma}_{jt}\bar{e}_{jt}}{(\alpha p+k)e_{kk}}\right\}\right] \quad (49)$$

となる。次に  $A$  を定めるために降伏条件 (36) を Jaumann 微分すると

$$\frac{\bar{\sigma}_{jt}}{2(\alpha p+k)} \frac{D\bar{\sigma}_{jt}}{Dt} = \alpha \frac{dp}{dt} + (\alpha' p + k') \frac{de}{dt} \quad (50)$$

となる。これに式 (48), (49) を代入して  $A$  について解くと

$$A = \frac{\mu\bar{\sigma}_{jt}\dot{\bar{e}}_{jt}/(\alpha p+k) + \alpha\kappa\dot{e}_{kk} - (\alpha' p + k')de/dt}{(1+6/\beta^2)\mu + \alpha^2\kappa + \frac{\bar{\sigma}_{jt}\bar{e}_{jt}}{(\alpha p+k)e_{kk}} \times \left\{\alpha\left(\mu + \frac{3}{2}\lambda\right) - \frac{\mu\beta^2}{4}\frac{\bar{\sigma}_{ki}\bar{e}_{ki}}{(\alpha p+k)e_{mm}}\right\}} \quad (51)$$

となる。一方、弾性変形によっては間隙比は変化しないとする (例えば球の最密充てん状態のまま圧縮することを考えてみれば間隙比が変化しないことが分かる。もちろん、粒子がつぶれるような変形も生じるから、厳密には一定でないが、粒子間のすべりによる塑性ひずみが主で、それに比べて弾性ひずみが小さいときはほぼ一定とみなせるであろう)。したがって、間隙比の変化は塑性ひずみ速度にのみよって  $de/dt = (1+e)\dot{e}_{kk}^p$  と表される。ゆえに式 (29) より

$$\frac{de}{dt} = (1+e)A\left[\alpha + \frac{3}{2}\frac{\bar{\sigma}_{jt}\bar{e}_{jt}}{(\alpha p+k)e_{kk}}\right] \quad (52)$$

となる。未知変数は  $\rho, u_i, \sigma_{jt}, e$  の計 11 個であり、式 (48), (49), (52) が 7 個の方程式を与える。ただし、式中の  $A$  には式 (51) を用いる。これと式 (30), (31) の連続の方程式と運動方程式の 4 個の方程式を合わせた計 11 個が必要な方程式を与える。これによって定まる

解は降伏条件 (36) とダイレイタンシー拘束条件 (35) を自動的に満足する。

### 7. 平面ひずみの条件と内部摩擦角

前節までの理論の具体的応用の一例として、硬化や弾性ひずみを考えないときの、塑性ひずみが平面ひずみになる条件を調べてみよう。まず、座標軸を応力の主軸に一致させてとる。応力  $\sigma_{jt}$  は

$$\sigma_{jt} = \begin{bmatrix} -\sigma_1 & & \\ & -\sigma_2 & \\ & & -\sigma_3 \end{bmatrix} \quad (53)$$

と表すことができ、偏差応力を

$$\bar{\sigma}_{jt} = \begin{bmatrix} -\bar{\sigma}_1 & & \\ & -\bar{\sigma}_2 & \\ & & -\bar{\sigma}_3 \end{bmatrix} \quad (54)$$

とすれば  $\bar{\sigma}_\alpha = \sigma_\alpha - p$  ( $\alpha=1, 2, 3$ ) であり、

$$p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 \quad (55)$$

(平均圧縮主応力) である。パラメーターは  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  の 3 個であるが、降伏条件を満たすとき、独立なパラメーターは 2 個となる。その二つとして  $p$  と、偏差応力比

$$\eta = -\bar{\sigma}_1/\bar{\sigma}_2 \quad (56)$$

を選ぶ。ただし  $\bar{\sigma}_1 \geq 0$  の場合を考える (図-3)。これはダイレイタンシーのない場合、前報<sup>10), 11)</sup>から分かるように  $\eta=1$  となることが分かっているからである。降伏条件を用いて、 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  を  $p$  と  $\eta$  のみで表せば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= p + \eta(\alpha p + k)/\sqrt{1-\eta+\eta^2} \\ \sigma_2 &= p - (\alpha p + k)/\sqrt{1-\eta+\eta^2} \\ \sigma_3 &= p - (\eta-1)(\alpha p + k)/\sqrt{1-\eta+\eta^2} \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

となる。一方、ひずみとして、平面ひずみ

$$e_{jt} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \gamma & 0 \\ \gamma & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (58)$$

を考える。対称性より  $\gamma \geq 0$  の場合のみ考えれば十分である。パラメーターは  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma$  の 3 個であるが、ダイレイタンシー拘束条件を用いれば、独立なパラメーターが 2 個になる。その二つとして、体積ひずみ

$$v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (59)$$

と、 $e_{jt}$  の主軸の  $\sigma_{jt}$  の主軸に対する  $x-y$  面内の相対回転角  $\theta$  (左回りに正) をとる。テンソル変換則より

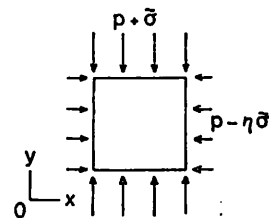


図-3 平面ひずみを生じさせる応力状態

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2\gamma}{\epsilon_1 - \epsilon_2} \quad (60)$$

である。ダイレイタンスー拘束条件を用いて  $\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma$  を  $v$  と  $\theta$  のみによって表すと

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= v \left( \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{12} \cos 2\theta} \right) \\ \epsilon_2 &= v \left( \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{12} \cos 2\theta} \right) \\ \gamma &= v \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{12}} \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

となる。これらを方程式 (33), (34) に代入すると,  $\dot{\epsilon}_{xx} = \dot{\epsilon}_{yy} = 0$  が自動的に満たされていることが分かる。したがって, 平面ひずみが生じる条件は  $\dot{\epsilon}_{zz} = 0$  であり, これを変形すると

$$\eta = \frac{6(1/\beta^2 - 1/12) + \sqrt{1/\beta^2 - 1/12} \cos 2\theta}{6(1/\beta^2 - 1/12) - \sqrt{1/\beta^2 - 1/12} \cos 2\theta} \quad (62)$$

となる。確かに  $\beta \rightarrow 0$  の極限では  $\eta \rightarrow 1$  となる。式 (62) を図示したものが図-4 である。応力とひずみとが共軸, すなわち  $\theta = 0$  となるような平面ひずみを生じさせるためには  $\eta$  が

$$\eta_0 = \frac{6\sqrt{1/\beta^2 - 1/12} + 1}{6\sqrt{1/\beta^2 - 1/12} - 1} \quad (63)$$

でなければならないが,  $\eta$  が  $1 \leq \eta < \eta_0$  の範囲にあれば, それに応じた非共軸な平面ひずみが生ずることが分かる。これはひずみ速度  $\dot{\epsilon}_{ji}$  の式には応力  $\sigma_{ji}$  のみならず, ひずみ  $e_{ji}$  も含まれているためであり<sup>15)</sup>, この非共軸性が本理論のひとつの特徴でもある (もちろん等方性を仮定している)。

一方, 平面ひずみ状態における降伏条件が Coulomb 則に一致するように内部摩擦角  $\phi$  と粘着力  $c$  とを図-5の

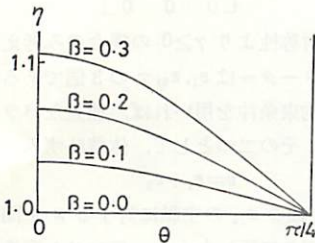


図-4 偏差応力比と非共軸変形との関係

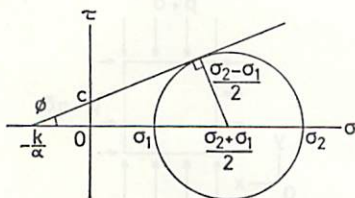


図-5 Mohr の円と  $\phi, c$

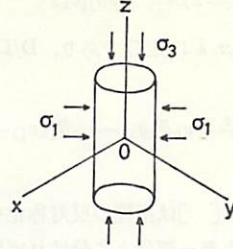


図-6 軸対称応力状態

Mohr の円と対応させて定めると

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{2\sqrt{1-\eta+\eta^2} \sin \phi}{1+\eta-(1-\eta)\sin \phi} \\ k &= \frac{2c\sqrt{1-\eta+\eta^2} \cos \phi}{1+\eta-(1-\eta)\sin \phi} \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

となる。すなわち, 非共軸性の程度により対応が異なる。  $\eta \rightarrow 1$  の極限では  $\alpha = \sin \phi, k = c \cos \phi$  となり, 前報<sup>10), 11)</sup>の結果と一致する。

### 8. 軸対称応力による変形と安定性

図-6 のような軸対称応力状態を考える。応力は

$$\sigma_{ji} = \begin{bmatrix} -\sigma_1 & & \\ & -\sigma_1 & \\ & & -\sigma_3 \end{bmatrix} \quad (65)$$

と表すことができ, 二つのパラメーター  $\sigma_1, \sigma_3$  を含んでいる。降伏条件を用いると独立なパラメーターはひとつとなる。そのひとつとして, 平均圧縮主応力

$$p = (2\sigma_1 + \sigma_3)/3 \quad (66)$$

を用いると

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= p + (\alpha p + k)/\sqrt{3} \\ \sigma_3 &= p - 2(\alpha p + k)/\sqrt{3} \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

となる。一方, ひずみは一般には非共軸と考え, せん断が生ずる面に  $y$  軸をとり

$$e_{ji} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 & \gamma \\ 0 & \gamma & -\epsilon_3 \end{bmatrix} \quad (68)$$

とおく。含まれるパラメーターは  $\epsilon_1, \epsilon_3, \gamma$  の3個であるが, ダイレイタンスー拘束条件により, 独立なパラメーターは二つである。その二つとして,  $z$  軸方向の圧縮ひずみ  $\epsilon_3$  と体積ひずみ

$$v = 2\epsilon_1 + \epsilon_3 \quad (69)$$

を用いる。残りをこれらで表すと

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= v/6 + \epsilon_3/2 \\ \gamma &= \sqrt{\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{12}\right)v^2 - \frac{1}{2}v\epsilon_3 - \frac{3}{4}\epsilon_3^2} \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

となる。式 (33), (34) に代入して  $\dot{v}$  と  $\dot{\epsilon}_3$  をつくり, その比をとって  $A$  を消去すると

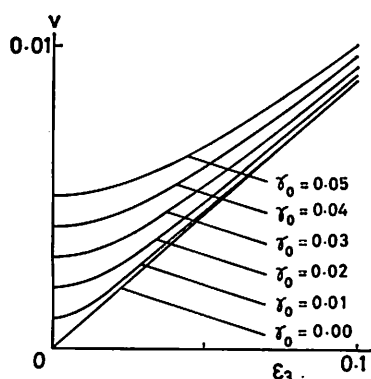


図-7 初期振動を与えたときのダイレイタンスー関係 ( $\alpha=0.5, \beta=0.1$ )

$$\frac{dv}{d\epsilon_3} = \frac{\alpha - \sqrt{3}/2 - (3\sqrt{3}/2)\epsilon_3/v}{-\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{2\sqrt{3}}{\beta^2} + \frac{\sqrt{3}}{36}\beta^2 + \left(\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\beta^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\beta^2\frac{\epsilon_3}{v}\right)\frac{\epsilon_3}{v}} \quad (71)$$

となる。 $\epsilon_3=0$  のとき  $v=0$  とすれば、ダイレイタンスー拘束条件から直接明らかのように、直線的ダイレイタンスー

$$v = \frac{3\beta}{2\sqrt{3} - \beta} \epsilon_3 \quad (72)$$

が得られる。このとき常に  $r=0$  であり、応力とひずみは共軸である。また、この解は安定であることも分かる。例えば  $\alpha=0.5, \beta=0.1$  とし、初期状態にいろいろなせん断ひずみ  $r_0$  を振動として加えた場合の解曲線が図-7 のようになる。すなわち、初期に非共軸のひずみを強制的に加えても、その後これは発達せず、共軸の場合の解 (72) に収束することが分かる。

### 9. ま と め

本報では前報<sup>10),11)</sup>で導いた、粒状体に適用可能な関連流動則の幾何学的意味を説明し、それをもとにして、ダイレイタンスーや硬化を含めた塑性理論に発展させた。ダイレイタンスーは粒子の相互接触という幾何学的要因に基づくものであるから、これは関連流動則による塑性理論からは導くことができない。したがってこれを内部拘束条件とみなさなければならず、この拘束条件に従うような塑性変形の方程式を一般的方法によって導いた。更に硬化や弾性ひずみを含めた場合の、より一般的な方程式系も与えた。例として、平面ひずみの条件、内部摩擦角と粘着定数との対応、軸対称応力下での変形を調べた。

序論でも述べたように、現在、土の弾塑性挙動を記述する種々の構成式が提案されており、数値計算によって実験との比較がなされている。しかし、そのために多く

の物質定数を決定することが必要となる。したがって、少数の事例について実験との対応がよいからといって、それがよいとは結論できない。理論を複雑化することは実験との一致をよくするとしても、しばしば本質的な点を見失わせることになる。例えば、ダイレイタンスーは関連流動則に基づく塑性変形とは異質の現象であることが古くから指摘されていたが、根拠はなくとも種々の付加的な“工夫”を行うことにより、表面的に実験と矛盾しないようにすることができる。そのために、かえってダイレイタンスーの本質的な性格が見失われがちになる。本理論は上述の意味での直接の応用を目指すものではなく、理論構成法の検討を行うものである。本理論の主張は、ダイレイタンスーが関連流動則を基本とする塑性変形とは別の概念であることから、それを幾何学的拘束条件として扱うべきであり、その拘束による以外の部分には関連流動則が適用できるということである。そして、これをもとにした“最も簡単な”理論を構成したものである。

実際のなものにするには、例えばダイレイタンスー拘束条件として、より現実的なものを用いることが考えられる。例えば  $v = \beta(1 - e^{-r/l})$  ( $\beta, l$  は定数) などとしてもよい。また、降伏条件としても式 (23) とは別の形が考えられるし、式 (36) の硬化則でも、間隙比  $e$  以外の要因も考えられてよい。しかし、そのような選択は、もはや理論的考察によって定まるものではなく、実験結果、応用の対象やその目的に照らして導かれるべきものである。したがって、本理論はそこまで及び得ないが、ただ、理論の構成は同様に行うことができることを強調しておきたい。このことは、一般に理論的考察の有効性、普遍性を示すものであるが、一方、その限界を示すものでもある。

### 参 考 文 献

- 1) Drucker, D. C. and Prager, W. (1952): "Soil mechanics and plastic analysis of limit design," Q. Appl. Math., Vol. 10, pp. 157-165.
- 2) Mandel, J. (1966): "Conditions de stabilité et postulat de Drucker," Rheology and Soil Mechanics (J. Kravtchenko and P. M. Sirieys, ed.), Berlin/Heidelberg/New York, Springer-Verlag, pp. 58-68.
- 3) Mandl, G. and Fernández Luque, R. (1970): "Fully developed plastic shear flow of granular materials," Géotechnique, Vol. 20, No. 3, pp. 277-307.
- 4) Spencer, A. J. M. (1964): "A theory of the kinematics of ideal soil under plane strain conditions," J. Mech. Phys. Solids, Vol. 12, pp. 337-351.
- 5) Goodman, M. A. and Cowin, S. C. (1972): "A continuum theory for granular materials," Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 44, pp. 249-266.
- 6) Kanatani, K. (1979): "A micropolar continuum theory for the flow of granular materials," Int. J. Engng. Sci., Vol. 17, pp. 419-432.
- 7) Roscoe, K. H., Schöfield, A. N. and Wroth, C. P. (1958):

- "On the yielding of soils," *Géotechnique*, Vol.8, No.4, pp.22-53.
- 8) Sekiguchi, H. and Ohta, H. (1977): "Induced anisotropy and time dependency in clays," Proc., Specialty Session 9, 9th Int. Conf. SMFE, Tokyo, pp.229-238.
  - 9) Nemat-Nasser, S. and Shokooh, A. (1980): "On finite plastic flows of compressible materials with internal friction", *Int. J. Solids Structures*, Vol.16, pp.495-514.
  - 10) 金谷健一 (1979): 粒状体の速度場の理論—関連流動則と特性曲面—, 「土質工学会論文報告集」, Vol.19, No.4, pp.103~112.
  - 11) 金谷健一 (1979): 粒状体の速度場の理論—弾塑性理論と不連続波動—, 「土質工学会論文報告集」, Vol.19, No.4, pp.113~120.
  - 12) 金谷健一 (1980): 粒状体の統計モデルとエントロピー, 「土質工学会論文報告集」, Vol.20, No.4, pp.151~160.
  - 13) 金谷健一 (1980): 粒状体の粒子モデルと仮想仕事の原理, 「土質工学会論文報告集」, Vol.20, No.4, pp.111~116.
  - 14) 金谷健一 (1980): せん断, 圧縮と構成方程式, 「土と基礎」, Vol.28, No.275, pp.5~9.
  - 15) 金谷健一: 誘導異方性と その表現, 「土質工学会論文報告集」, Vol.22, No.1, pp.136~140.
  - 16) Hill, R. (1950): *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford, Clarendon.