

粒状体の統計モデルとエントロピー

(A Statistical Model of Granular Materials and Entropy)

金 谷 健 一* (Ken-ichi Kanatani)

キーワード：間隙率／ダイレイタンス／統計的解
析／土質力学／摩擦／粒状体
IGC： D6

1. ま え が き

土や砂のような粒状体の力学的挙動を理論的に完全に記述することは内部構造の複雑さのため極めて困難である。従来研究方法には大別して二つの手法があった。一つは連続体として扱う方法である。これは応力、ひずみなどの巨視的な量で記述するものであり、実験との対応が容易となり、実用的な方法である。しかし、内部の離散的構造を無視しているため、巨視的な構成方程式を内部の粒子の状態と理論的に関連させることができない。Drucker & Prager¹⁾は関連流動則に基づく塑性変形の理論を提案したが、関連流動則の適用に関して多くの批判が提出された。これに対し Spencer²⁾は応力特性曲線に沿ってすべりが生じるという二重すべりの理論を提案したが、なお多くの問題を残している。一方、Goodman & Cowin^{3),4)}は充てん率を内部変数とする理論を有理力学 (rational mechanics) の立場より展開しているが、形式的議論が多く、粒状体の特性を十分把握しているとはいえない。これに対し金谷^{5),6)}は粒子が相互配置を自由に变えて動きうる流動状態に対して粒子間相互作用の統計的平均をとり、等価な連続体の方程式を求め、それにより粒状体の流動の特性がよく記述されることを示した。更に Drucker-Prager の塑性論の立場にもどり、粒状体にも適用できる新しい関連流動則を提案し、流動の安定性や波動の伝播の解析も試みた^{7),8)}。しかし、連続体力学の立場のみで理論を展開するには限度があり、とりわけ変形に伴う内部構造の変化を理論に組み入れることが困難である。このため実際問題としては Roscoe ら^{9),10)}のような半実験的な現象記述にならざるを得ない。

もう一つの方法は微視的モデルによるもので、例えば等径の球の規則的充てんモデルを考え、その力学的特性を把握しようとするものである。これは古くは Rey-

nolds¹¹⁾に始まるが、規則充てん状態の特性は充てんの仕方に大きく依存する。実際の土や砂は内部の粒子の配置がランダムであるから、何らかの統計的操作を加えてはじめて現実的なモデルが得られる。Newland & Allely¹²⁾は潜在すべり面上の粒子の性質を調べ、面上に関して統計的平均をとっている。この考えは村山・松岡^{13),14)}らにより発展させられているが、空間的に生じる現象を平面上のみの統計によって十分記述できるかどうかという問題が残る¹⁵⁾。これに対し Rowe^{16),17)}は各種の規則充てん状態に対する考察からランダム充てん状態の特性を推論した。しかし、Rowe の推論を理論的に裏づけようとした Horne¹⁸⁾⁻²⁰⁾は粒子配置全体の問題を二粒子の統計の問題におきかえてしまった。この考えは小田、小西、徳江らによって実験的検証や理論的発展が試みられているが²¹⁾⁻²⁵⁾、せん断ひずみやダイレイタンスを考えるには三個以上の粒子の密接な相互作用を導入しなければならないのではないと思われる¹⁵⁾。空間全体の粒子に関する統計理論を最初に試みたのは最上²⁶⁾⁻²⁸⁾である。最上は粒子配置全体にわたって「最も確からしい」配置を考えることにより内部状態の記述に手がかりを与えた。このことは画期的なことであったが、その確率の導入の仕方に疑問があり、また確率やエントロピーの意味が明確でなかった。

本研究は粒子配置全体を考える Rowe の理論と粒子配置に確率を導入する最上の理論とをあわせて粒子配置の統計モデルを確立し、これによりダイレイタンス等の変形特性を究明しようとする試みである。これは一部分は新保²⁹⁾が試みたものであるが、本論文では状態空間、エントロピー等の概念の厳密な意味づけを行い、最上理論のような統計的考察をどこまで押し進められるかを検討するものである。

2. 粒子配置の固有状態とその確率分布

最上²⁶⁾⁻²⁸⁾の導入した粒子配置の確率の考え方を新たな視点で考え直してみる。粒子は等半径の剛体球であるとし、体積 V のサンプルをとったとする。 V は粒子の体積に比べて十分大きく、 V に含まれている粒子の総数 N は十分大きいとする。全体としてみれば粒子の配置はランダムであると考えられるが、局所的にみれば各部分ご

* 群馬大学工学部情報工学科 助手 (桐生市天神町 1-5-1)

・この論文に対するディスカッションは昭和56年10月1日までにご投稿下さい。

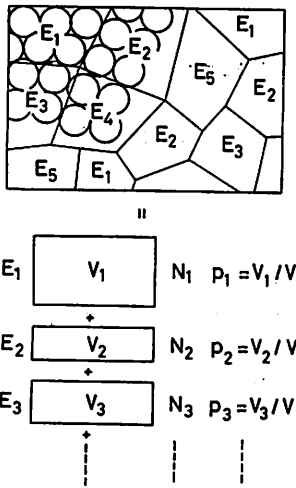


図-1 粒状体の固有状態と確率分布

とに規則的配置をもつ小領域から成るであろう(図-1)。局所の間隙率を E とすれば定義から E は各小領域ではそれぞれの値をとる。この領域 V 内で E のとりうる値を E_1, E_2, \dots, E_n としよう。 n は小領域の個数よりは一般に少ない。それは同じ間隙率をもつ小領域が複数ありうるからである。そこで間隙率 E_i をもつ小領域の体積の総和を V_i とし、その中に含まれる粒子数を N_i とする。当然

$$\left. \begin{aligned} N_1 + N_2 + \dots + N_n &= N \\ V_1 + V_2 + \dots + V_n &= V \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

である。このサンプルの「状態」は

$$\begin{pmatrix} E_1 & E_2 & \dots & E_n \\ V_1 & V_2 & \dots & V_n \\ N_1 & N_2 & \dots & N_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

で表される。これが最上の考えを書き改めたものである。(最上は局所間隙率 E のかわりに局所間隙比 $e(=E/(1-E))$ を用いている。)ところが、間隙率の定義より各 i で

$$V_i(1-E_i) = v_0 N_i \quad (3)$$

が成立する。ただし v_0 は一粒子の体積である。ゆえに E_i と V_i が分かれば N_i は自動的に定まるのでサンプルの状態を記述するのに N_i は必要でない。また V_i のかわりに V との比を

$$p_i = V_i/V \quad (4)$$

とおけば、サンプルには間隙率 E_i の状態が割合 p_i で含まれていると解釈できる。当然

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \quad (5)$$

である。以上よりサンプルの状態は

$$\begin{pmatrix} E_1 & E_2 & \dots & E_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \quad (6)$$

と表しても上述の表記と等価である。以後、 p_i を「固有状態」 i の「確率分布」とよぶことにする。このサン

プルの全体としての平均間隙率 \bar{E} は定義より計算すると

$$\bar{E} = \frac{V - v_0 N}{V} = \sum_{i=1}^n \frac{V_i - v_0 N_i}{V_i} \times \frac{V_i}{V} = \sum_{i=1}^n E_i p_i \quad (7)$$

となる。すなわち平均間隙率 \bar{E} は E_i の確率分布 p_i に関する「期待値」に等しい。このことから $p_i = V_i/V$ を確率と考えてよいことが分かる。(最上は N_i/N を確率と考えていたが、上述のように p_i を確率と考えるほうがよいと思われる。)

以上に述べた発想は量子力学の立場と共通する。量子力学では系は固有状態の重ね合わせとして表現できると考えている。粒状体も同様に各サンプルは固有状態の複合であり、それぞれの固有状態に確率が付与されており、物理量の巨視的な観測値はその確率に関する期待値であると考えてるのである。

3. エントロピーと状態密度

次に、各固有状態にどのような確率分布を想定するのが「最も確からしい」かを考える。いま平均間隙率 \bar{E} の十分大きなサンプルを考え、それがそれぞれ間隙率 E_1, E_2, \dots, E_n である固有状態 $1, 2, \dots, n$ から成っているとす。ここでサンプルの全体積を M 等分して、 M 個の小領域に固有状態を配分することを考える。状態 $1, 2, \dots, n$ をそれぞれ M_1, M_2, \dots, M_n 個配分したとすれば

$$\sum_{i=1}^n M_i = M \quad (\text{i. e. } \sum_{i=1}^n M_i/M = 1) \quad (8)$$

$$\bar{E} = \sum_{i=1}^n E_i (M_i/M) \quad (9)$$

となる。このような配分の仕方の総数は

$$W = M! / (M_1! M_2! \dots M_n!) \quad (10)$$

である。 M や各 M_i が十分大きいときは対数を取り、Stirlingの公式を用いれば

$$\log W \approx -M \sum_{i=1}^n (M_i/M) \log (M_i/M) \quad (11)$$

となる。各配分の仕方が等価であれば、最も確からしい配分はこれを最大とするものである。各状態に割り当てられた比 M_i/M を確率分布 p_i と考えてよいから p_i は

$$H_n = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i \quad (12)$$

を最大にするようなものとして定まる。ただし条件(8)、(9)より制約

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad \sum_{i=1}^n E_i p_i = \bar{E} \quad (13)$$

が必要である。

サンプルの規模を限りなく大きくとってゆけば局所間隙率 E のとりうる値の種類も限りなく多くなり、連続変数と考えてさしつかえなくなる。そして連続確率分布 $p(E)$ が次のように定義される。

$$p(E) = \lim_{\Delta E \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta E} \lim_{V, N \rightarrow \infty} [\text{区間 } [E, E + \Delta E] \text{ に含まれ}$$

る固有状態の確率の和] (14)
 しかし、式(12)を単に

$$H = - \int p(E) \log p(E) dE \quad (15)$$

でおきかえてはならない。なぜならこれはパラメーターに関して不変な形式ではないからである。例えばEの単調な関数F(E)を考え、Fの確率分布をp(F)とするとp(E)dE=p(F)dFよりp(E)=p(F)dF/dEであるから

$$H = - \int p(F) (dF/dE) \log (p(F) dF/dE) (dE/dF) dF \\ = - \int p(F) \log p(F) dF - \int p(F) \log (dF/dE) dF$$

となり、これは $-\int p(F) \log p(F) dF$ に等しくない。パラメーターのとり方(間隙率, 間隙比, 充てん率, 充てん比, etc.)は便宜的なものであるから、これに対して不変でなければ意味がない。上述のことは次に述べる「状態密度」を考慮しなかった結果である。すなわち、サンプルの規模を大きくしてゆく(あるいは粒子の寸法を小さくしてゆく)と、局所間隙率Eのとりうる値E_iの種類の数も増加し、E軸上に稠密に分布して連続変数となり、次のような密度分布Ω(E)を定義するはずである。

$$\Omega(E) = \lim_{\Delta E \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta E} \lim_{N, V \rightarrow \infty} [\text{区間}[E, E + \Delta E] \text{に含まれる固有状態の種類の数}] / [\text{固有状態全体の種類の数}] \quad (16)$$

である。(定義式(14)との違いに注意。)これを「固有状態密度関数」あるいは単に「状態密度」とよぼう。(最上の理論には状態密度の概念が現れていないが、これは彼が間隙比eを表す軸上をはじめから等分割して状態を考えたためである。)定義式(16)を用いて式(12)のH_nに極限操作をほどこすと

$$H_n \approx - \int p(E) \log (p(E)/\Omega(E)) dE - \log n \quad (17)$$

となり、第二項は発散するがp(E)にはよらない項なので除いてもよい。そこで

$$H = - \int p(E) \log (p(E)/\Omega(E)) dE \quad (18)$$

とおく。これは明らかにパラメーターのとり方によらない不変な量である。実はこれは統計情報理論におけるKullback³⁰⁾の情報量にほかならない。これは分布p(E)の分布Ω(E)からのへだたりを表すもので、数理統計学で重要な役割を果たすことが知られている。

4. エントロピーの意味と統計力学との対比

前節で導いたエントロピー最大の原理によってどうい

う確率分布が定義されるかを調べてみよう。求めるものは、平均間隙率 \bar{E} が与えられたとき制約条件、

$$\int p(E) dE = 1 \quad (19)$$

$$\int E p(E) dE = \bar{E} \quad (20)$$

を満たすp(E)のうち式(18)で与えられたエントロピーHを最大にするものである。これは制約条件付き変分問題であるからLagrange未定乗数法を用いればよい。制約式(19), (20)に対する未定乗数をそれぞれν, θとすれば

$$\delta \left(H + \nu \int p(E) dE + \theta \int E p(E) dE \right) = 0 \quad (21)$$

となる。p→p+δpとすれば

$$\delta H = - \int \delta p \log (p/\Omega) dE - \int \delta p dE \quad (22)$$

より式(21)は

$$\int (-\log (p/\Omega) - 1 + \nu + \theta E) \delta p dE = 0 \quad (23)$$

となりこれが任意のδpで成立することより(…) = 0, すなわちp = 定数 × e^{θE}Ωとなる。この定数は制約条件(19)が成立するように定まり、θは制約条件(20)が成立するように定められる。前者の定数をZ(θ)⁻¹とおけば

$$\left. \begin{aligned} p(E) &= e^{\theta E} \Omega(E) / Z(\theta) \\ Z(\theta) &\equiv \int e^{\theta E} \Omega(E) dE \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

となる。ところで

$$(d/d\theta) \log Z(\theta) = Z'(\theta) / Z(\theta) = \int E p(E) dE = \bar{E} \quad (25)$$

であるからθは

$$\bar{E} = (d/d\theta) \log Z(\theta) \quad (26)$$

を解いて定めることができる。このように \bar{E} より定まるθ(\bar{E})を「共役間隙率」、Z(θ)を「分配関数」、式(24)のように与えられる確率分布p(E)を「正準分布」とよぼう。このときのエントロピーHの値は正準分布(24)を代入して

$$H(\bar{E}) = -\theta \bar{E} + \log Z(\theta) \quad (27)$$

となる。またlog Z(θ)を二度微分したものをV(θ)とおけば

$$V(\theta) = (d^2/d\theta^2) \log Z(\theta) = Z''(\theta) / Z(\theta) - (Z'(\theta) / Z(\theta))^2 \\ = \bar{E}^2 - (\bar{E})^2 = (\overline{E^2} - \bar{E}^2) \quad (28)$$

となり、これは局所間隙率Eのサンプル内での分散を表す。式(27)はHがlog Z(θ)の \bar{E} に関するLegendre変換であることを意味する。すなわち両辺の変分をとってみると式(25)より

$$dH = -\bar{E} d\theta - \theta d\bar{E} + (Z'/Z) d\theta = -\theta d\bar{E}$$

となる。ゆえに次の関係を得る。

$$dH = -\theta d\bar{E} \quad (\text{i.e. } \theta = -dH/d\bar{E}) \quad (29)$$

既に明らかなように以上の議論は統計力学の議論と全く同一である。統計力学として考えるには E を間隙率ではなく系のエネルギーとみなし、

$$\theta = -1/kT \quad (30)$$

によって温度 T を定義すればよい。ただし k は Boltzmann 定数である。熱力学的エントロピー S は

$$S = kH \quad (31)$$

によって与えられる。式(24)は平均エネルギーが \bar{E} のときの Gibbs の正準分布であり、式(26)~(28)もよく知られた分配関数の性質である。式(29)は

$$d\bar{E} = TdS \quad (\text{i. e. } T^{-1} = dS/d\bar{E}) \quad (32)$$

と表せる。エネルギーの増分 $d\bar{E}$ が内部エネルギーの増分 dU と外力のする仕事 pdV とから成るとすれば

$$\begin{aligned} d\bar{E} &= dU + pdV \\ \therefore dU &= TdS - pdV \end{aligned} \quad (33)$$

となる。式(33)のような熱力学的関係式が得られるのは E がエネルギーであって、熱は分子運動に起因する場合であることに注意しよう。例えば分子運動以外のより巨視的な揺動に対して熱力学的な関係式を構成すると別の形になることが分かる⁹⁾。なお、式(21)は停留値を与える条件であるが、これが実際に最小値を与えること、および式(26)の右辺が θ の単調関数であって、 \bar{E} に対して必ず θ が一意的に定まることなどは対数関数 $\log x$ の凸性により証明できる(例えば Khinchin³¹⁾)。

以上の議論の基本的仮定は3節で述べたように「与えられた平均間隙率 \bar{E} を実現するような固有状態の組合せ方はいろいろあるが、どれも等価である」ということのみである。他は数学的帰結に過ぎない。このことは状態密度 $\Omega(E)$ をいかに定義すべきかを述べていることになる。なぜなら、各固有状態の組合せ方が等価であるような固有状態の密度を $\Omega(E)$ として定義すべきだからである。したがって、上述の理論は適当な $\Omega(E)$ が定義できれば成立することになる。しかし、統計的な考察のみで $\Omega(E)$ を決定することはできず、これを知るには個々の粒子間の相互作用を詳細に知らねばならない。したがって、 $\Omega(E)$ が未定である限り、われわれは系の性質を知ることができず、それ以上議論を進めることができないことになる。しかし一方、一つの方針が定まったともいえる。すなわち、以後、具体的な粒子間の微視的考察によって $\Omega(E)$ を求めることが課題となった。このことは極めて重要なことであるが、従来の類似の研究では十分理解されていなかった。これまでパラメーター x のとりうる値 x_1, x_2, \dots (連続パラメーターでも同様である)に対する各確率 p_i を平均値一定($\sum p_i x_i = \bar{x}$)のもとで定める方法として $-\sum p_i \log p_i$ の最大化を用いた研究がいくつかある。例えば国沢³²⁾は x をある商品の価格とし、価格が x_i のときの販売比率 p_i を予測しようと

している。粒状体においても宇野³³⁾は x を二次元粒状体の粒子接触によって作られる多角形の辺の数とし、 x_i 角形の出現する確率 p_i を同様にして計算した。Jowitt³⁴⁾は間隙率が x_1, x_2, \dots, x_{20} なる特定の28種類の規則充てんを考え、各 x_i の出現確率 p_i を同様に計算した。Brown³⁵⁾はこれを連続変数として扱い、接触力分布や弾性定数の値の分布の計算にも適用した。これらの計算はすべてパラメーター x の平均値 \bar{x} のみより、その確率 p_i は考えている系の物理的性質や内部機構に全く無関係に一意的に定まってしまう、極めて不自然な印象を与え、その系の物理的性質、内部機構が反映されているのかという素朴な疑問をいだかせるものであった。これは結局、各状態の「重み」 Ω_i を考えなかったためである。各 x_i の状態がすべて等価である理由があれば Ω_i を一定値におくことができるが、そうでないときはその重要度に応じた Ω_i を定めなければならない。そして各 p_i は $-\sum p_i \log(p_i/\Omega_i)$ の最大化によって定まる。各 Ω_i の意味とその値は考えている系の物理的性質と内部機構とによって定めなければならない。

統計力学では $\Omega(E)$ を力学的に決定することが一般には不可能とされている。そして $\Omega(E)dE = [\text{エネルギー準位が } E \text{ と } E+dE \text{ の間にある量子力学的固有状態の数}]$ と仮定している。これは言い換えれば「系の巨視的エネルギー \bar{E} を実現する量子力学的固有状態の組合せはすべて等価である」という仮定に同等である。この仮定を更に別なエルゴード仮定とよばれるものに置きかえて数学的に証明しようという試みもあったがいずれも成功していない(cf. Khinchin³¹⁾)。このような統計力学の定式化を情報理論的に解釈したのが Jaynes³⁶⁻³⁹⁾である。実際、式(12)は Shannon の情報エントロピーにはかならないが、これは系の不確定度を表すものであり、不確定度を表す量は適当な条件のもとに Shannon のエントロピーおよびそれを一般化した Kullback の情報量のみであることが情報理論で知られている。ゆえに特定の制約を受ける以外は全くランダムな系とはその制約のもとでエントロピーを最大にするようなものである。これが Jaynes の原理であるが、Jaynes はパラメーター不変性および状態密度の概念をも指摘している³⁹⁾。

一方、エントロピーを最初に粒状体にとり入れた最上²⁶⁻²⁸⁾の考えはいく分異なるものであった。最上は間隙率 E のかわりに間隙比 e をとり、状態密度関数 $\Omega(e)$ は考えず(したがってパラメーターのとり方に不変でない)、単に e 軸上の区間 $[e_{\min}, e_{\max}]$ を n 等分した。そして体積 v_0 の N 個の球を体積 V の領域に配分して(2)のような状態を得る場合の総数を計算して

$$W = \frac{\{(1+e)N+n-1\}!}{n! \{(1+e)N-1\}!} \prod_{i=1}^n \frac{\{(1+e_i)N_i\}!}{N_i!(e_i N_i)!} \quad (34)$$

を得た。そして対数を取り、Stirling の公式により $\log W$ の近似式を求め、確率分布として V_i/V でなく N_i/N を考え、これを最大にするものを求めた。したがって、平均間隙比を指定する制約条件は用いず、 $N_i/N=1/n$ (同数配分) というほぼ自明に近い結果を得た。それを代入した $\log W$ の式は複雑であるが、ここで $e_i = \bar{e} + \varepsilon_i$ ($\bar{e} = \sum e_i/n$) とおき ε_i の高次のモーメントは微小であると仮定して

$$\log W \approx A + N(\bar{e} + 1) \log(1 + \bar{e}) - N\bar{e} \log \bar{e} - Ns/2 \bar{e}(1 + \bar{e}) \quad (35)$$

を得た。ただし A は定数で $s = \sum (e_i - \bar{e})^2/n$ である。そして、外力のする仕事がこのエントロピーを増加させると仮定し、その関係式の表現に大胆な仮定を用いて粒状体の変形を支配する方程式を得ようと試みた。このような発想は極めて漸新であったが、多くの仮定の意味が明確でなかった。最上の理論に関しては、これまでの考察から次のことがいえる。(1) パラメーターのとり方に不変な形式であるべきである。したがって状態を考えるのに特定のパラメーターを等分するのではなく状態密度関数を考えるべきである。(2) 確率分布は N_i/N でなく V_i/V である。そして、巨視的間隙率(比)を指定する制約条件が必要である。(3) 求めるべきものはエントロピー自体ではなく、それを最大とする正準分布である。(4) 仕事がエントロピー(35)を増加させるという仮定は粒状体の変形の考察から行ったと考えるべきであって、熱力学による一般的帰結とは考えられない。(5) 統計的方法は理論の枠と方向のみを与えるものであり、系の巨視的な力学法則を知るには結局は微視的な粒子間相互作用を具体的に考察しなければならない。

5. 固有状態における接点力とすべり

以下では二次元粒子配列のモデルを考え、粒子間相互作用を詳しく研究する。規則配列からなる固有状態の例が図-2 に示されている。実際のサンプルではこのような固有状態がさまざまな形で小領域にわかれて混じり合っているのであるが、その統計操作は後述するとして、まず、特定の固有状態の特性を調べてみよう。図-2 に示すような互いに隣接する粒子の中心同士を結んで基本単位となる平行四辺形(ひし形)が得られる。これは互いに直交する二本の対角線をもつが、そのうち第一象限を通るものと x 軸との傾き角を β とする。そして、この対角線と基本四辺形の辺とのなす角を α とする。このとき

$$\pi/6 < \alpha < \pi/3, \quad 0 \leq \beta < \pi/2 \quad (36)$$

である。ただし $\alpha = \pi/6, \pi/3$ のときは最密充填状態となるので除外してある(後に改めて調べる)。したがって、(36)の範囲の α, β の組 (α, β) が与えられればこ

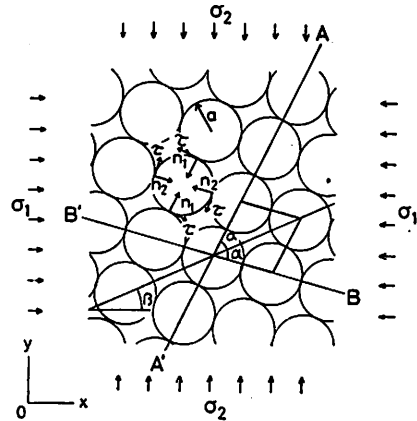


図-2 二次元粒子配列の固有状態

のような配列が指定できる。(36)の α, β の領域を「状態空間」とよび、特定の状態を「状態 (α, β) 」などと呼ぶことにする。

次に x 軸, y 軸が主応力軸となるようにとられているとして、主応力を σ_1, σ_2 とする(圧縮が正)。このとき二種類の接点对に引き起こされる力を接点において垂直方向と接線方向とにわたしたものを図-2 のように n_1, n_2, τ とする。接線方向の力の大きさが二種類の接点对に対して等しいことはモーメントの釣り合い条件より明らかである。 n_1, n_2, τ は仮想仕事の原理に基づく一般的公式から導けるが¹³⁾、次のように直接に計算することもできる。主応力状態の定義より図-2 の AA' 面に作用する力を単位長さ当たり (f_x, f_y) とすれば $f_x = \sigma_1 \sin(\alpha + \beta), f_y = -\sigma_2 \cos(\alpha + \beta)$ であり、これが接点力 n_2, τ によって支えられていることより

$$\tau = 2a \{ \sigma_1 \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) - \sigma_2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) \} \quad (37)$$

$$n_2 = 2a \{ \sigma_1 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + \sigma_2 \cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) \} \quad (38)$$

となる。 n_1 も BB' 面を考えれば同様に

$$n_1 = 2a \{ \sigma_1 \sin(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta) + \sigma_2 \cos(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta) \} \quad (39)$$

となる。ただし a は粒子の半径である。ここで主応力 σ_1, σ_2 のかわりにそれぞれ圧縮力, せん断力を表す

$$p = (\sigma_1 + \sigma_2)/2, \quad q = (\sigma_1 - \sigma_2)/2 \quad (40)$$

を用いると式(37)~(39)は次のように変形される。

$$\left. \begin{aligned} \tau &= 2a(-p \cos 2\alpha + q \cos 2\beta) \\ n_1 &= 2a(p \sin 2\alpha - q \sin 2\beta) \\ n_2 &= 2a(p \sin 2\alpha + q \sin 2\beta) \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

次に接点でのすべりを調べる。粒子の摩擦角を ϕ とする。図-2 で接点力 n_1, n_2 が記入されている接点をそれぞれ「接点1」, 「接点2」とよび、図-2 の τ の方向に τ が正となるものを「正のすべり」、 τ が反対方向のもの

を「負のすべり」とよぶ。接点力が Coulomb 摩擦力であるとすれば、各種のすべりが生ずる条件は次のようになる。

i) 接点1の正のすべり： $\tau > n_1 \tan \phi$
 $\therefore q \cos(2\beta - \phi) > p \cos(2\alpha - \phi)$ (42)

ii) 接点1の負のすべり： $-\tau > n_1 \tan \phi$
 $\therefore q \cos(2\beta + \phi) < p \cos(2\alpha + \phi)$ (43)

iii) 接点2の正のすべり： $\tau > n_2 \tan \phi$
 $\therefore q \cos(2\beta + \phi) > p \cos(2\alpha - \phi)$ (44)

iv) 接点2の負のすべり： $-\tau > n_2 \tan \phi$
 $\therefore q \cos(2\beta - \phi) < p \cos(2\alpha + \phi)$ (45)

外力としては等方圧縮の状態からしだいにせん断力を増加させてゆくことにする。すなわち応力比 q/p を増加させてゆく。

$$q/p = (\sigma_1/\sigma_2 - 1)/(\sigma_1/\sigma_2 + 1)$$
 (46)

であるから、 $\sigma_1 = \sigma_2$ の状態より σ_1 を増加させてゆくととき応力比 q/p は範囲

$$0 \leq q/p < 1$$
 (47)

を増加してゆく。ゆえに、上述の i)~iv) のすべりでは q/p を 0 から増加させてゆくととき式(42)~(45)の条件のうち最初に満足されるようなすべりが最初に生じる。そこで場合において調べる。

1) $0 < \beta < \pi/4 - \phi/2$
 $(0 < \cos(2\beta + \phi) < \cos(2\beta - \phi))$
 $\left. \begin{aligned} (+1) \quad q/p > \cos(2\alpha - \phi)/\cos(2\beta - \phi) \\ (-1) \quad q/p < \cos(2\alpha + \phi)/\cos(2\beta + \phi) \\ (+2) \quad q/p > \cos(2\alpha - \phi)/\cos(2\beta + \phi) \\ (-2) \quad q/p < \cos(2\alpha + \phi)/\cos(2\beta - \phi) \end{aligned} \right\}$ (48)

ただし (+1) は接点1の正のすべりを表し、他も同様である。 $\phi < \pi/4$ のとき q/p が小さくても、 α が $\pi/6$ か $\pi/3$ に近ければ $(\pi/6 < \alpha < \pi/4 - \phi/2, \pi/4 + \phi/2 < \alpha < \pi/3)$ α はそれぞれ $\pi/6, \pi/3$ になるようにすべり、最密充てん

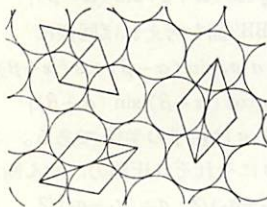


図-3 最密充てん状態における状態の縮退

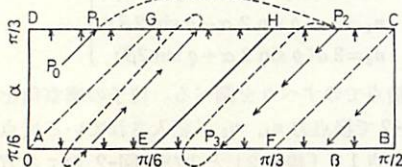


図-4 二次元粒子配列の状態空間

状態となって安定するが、それ以外の場合は (+1) すべりが生じることが分かる。

2) $\pi/4 - \phi/2 < \beta < \pi/4 + \phi/2$
 $(\cos(2\beta + \phi) < 0 < \cos(2\beta - \phi))$
 $\left. \begin{aligned} (+1) \quad q/p > \cos(2\alpha - \phi)/\cos(2\beta - \phi) \\ (-1) \quad q/p > \cos(2\alpha + \phi)/\cos(2\beta + \phi) \\ (+2) \quad q/p < \cos(2\alpha - \phi)/\cos(2\beta + \phi) \\ (-2) \quad q/p < \cos(2\alpha + \phi)/\cos(2\beta - \phi) \end{aligned} \right\}$ (49)

この場合も場合わけによって調べると前述の条件付で $\alpha > \beta$ では (+1) すべり、 $\alpha < \beta$ では (-1) すべりが生じることが分かる。

3) $\pi/4 + \phi/2 < \beta < \pi/2$
 $(\cos(2\beta + \phi) < \cos(2\beta - \phi) < 0)$
 $\left. \begin{aligned} (+1) \quad q/p < \cos(2\alpha - \phi)/\cos(2\beta - \phi) \\ (-1) \quad q/p > \cos(2\alpha + \phi)/\cos(2\beta + \phi) \\ (+2) \quad q/p < \cos(2\alpha - \phi)/\cos(2\beta + \phi) \\ (-2) \quad q/p > \cos(2\alpha + \phi)/\cos(2\beta - \phi) \end{aligned} \right\}$ (50)

この場合はやはり同様に考えれば (-1) すべりが生じることが分かる。

1), 2), 3) を総合すれば一般には $\alpha > \beta$ のとき (+1) すべり、 $\alpha < \beta$ のとき (-1) すべりが生じると結論される。

最後に粒子が最密充てんの場合、すなわち $\alpha = \pi/6, \pi/3$ の場合を考える。このとき図-3 のように基本四辺形のとり方によって複数の状態指定の方法がある。同一状態を指定している (α, β) の組の間の関係を \sim で表すと

$$\left. \begin{aligned} (\pi/6, \beta) \sim (\pi/6, \beta \pm \pi/3) \\ (\pi/3, \beta) \sim (\pi/3, \beta \pm \pi/3) \\ (\pi/6, \beta) \sim (\pi/3, \beta \pm \pi/6) \end{aligned} \right\}$$
 (51)

という関係があることが分かる。

以上の本節の結果をまとめると次のようになる。状態 (α, β) は $\alpha - \beta$ 平面上の $\pi/6 \leq \alpha \leq \pi/3, 0 \leq \beta \leq \pi/2$ であるような図-4 の長方形 ABCD 内の一点として表される。ただし図-4 で線分 AD と線分 BC 上の状態は同一であり、線分 DG は線分 HC と、線分 GH は線分 AE と、線分 EF は線分 HC と、線分 FD は線分 AE とそれぞれ同一視される。これが状態空間である。そして線分 EH より左の領域では (+1) すべりが生じ、右の領域では (-1) すべりが生じる。各すべりでは図-2 より明らかなように α と β が同じ大きさだけ変化する。したがって、例えば図-4 の点 P_0 で表される状態は 45° の傾きで右上に進み、点 P_1 に達する。ところがこの状態は点 P_2 の状態と同一であり、ここから (-1) すべりにはいり、左下に進んで P_3 に達する。この状態は再び点 P_2 の状態と同一であるから、再び P_2 より左下に進み、これを繰り返す。これが「状態の軌跡」である。ただし上辺、下辺付近の短い矢印は q/p が小さいときの初期移動を表す。以上よ

り次のことが明らかになる。三角形 ADG, および三角形 FBC 内の点で表される状態は変形がはじまるとすみやかに消失してしまう。なぜならこの領域に流入する状態の軌跡が存在しないからである。結局、変形が始まると状態は平行四辺形 AEHG と平行四辺形 EFCH とにはいり、周期的に変化する。この二つの平行四辺形を切り抜いて、AE と GH, EF と HC とをそれぞれはりあわせれば二つの円筒ができる。各状態はこの二つの円筒の表面上を、それぞれ独立に反対向きに輪を描いて回転していることになる。

6. 粒状体の正準分布とエントロピー

前節で各固有状態の特性を調べたので次に巨視的なサンプルにはそのような固有状態がどういう割合で混ざっているかを統計的に考察する。このことは前節で調べた固有状態の状態空間に確率分布を定義することにほかならない。われわれは間隙率 E を唯一の巨視的パラメータと考えている。間隙率 E は各状態 (α, β) によって定まる状態量の一つである。図-2 より容易に分かるように

$$E(\alpha) = 1 - \pi/4 \sin 2\alpha \quad (52)$$

であり、これは β によらない。したがって、 E に対する確率分布を考えることは、 α に対する確率分布を考えると同等で、 β を考慮する必要はない。これは、 β が固有状態の剛体回転を表すパラメータだからであり、ランダムなサンプルにはあらゆる方向を向いた固有状態が等しい割合で含まれていると考えるためである。すなわち、間隙率 E のみをパラメータと仮定しているため、構造異方性（ファブリック）は考えないのである。

既に述べたように、統計的考察をするためには状態密度関数を知る必要がある。これは E に対するものを考えるかわりに α に対するものも考えてもよい。（なぜなら全体の理論はパラメータのとり方に不変な形式になっているからである。）ところで粒状体においても統計力学と同様に状態密度をうまく決定する方法が見当たらない。そこで、仮に $\Omega(\alpha)$ を定数と考えて

$$\Omega(\alpha) = 6/\pi \quad \pi/6 < \alpha < \pi/3 \quad (53)$$

とおこう。この意味は次の通りである。粒子を規則充填するとき隣接する接点と中心を結んで作られる角は $\pi/3$ から $2\pi/3$ の範囲、すなわち α が $\pi/6$ から $\pi/3$ の範囲にあるが、この α の区間を細かく n 等分する。これは、粒子の周囲の表面を等分することとも考えられるが、このようにとりうる接点の位置を等間隔な離散的な位置に限定しておいて、特定の平均間隙率を実現するような粒子配列の組み合わせ方を考えるのである。そして各粒子の周囲の表面上のどの点も接点となりうる可能性が等しいと考えて最後に $n \rightarrow \infty$ とする。これは間隙率（比）そのものを直接に等分するよりはるかに妥当な仮定

といえる。式(53)を間隙率 E の状態密度に変換すれば式(52)より

$$\Omega(E) = 6/(1-E)\sqrt{16E^2 - 32E + 16 - \pi^2} \quad (54)$$

となる。このとき式(24)より平均間隙率 \bar{E} のときの正準分布は次のようになる。

$$p(\alpha) = (6/\pi)e^{\theta E(\alpha)} / Z(\theta) \quad \left. \right\} \quad (55)$$

$$Z(\theta) = (6/\pi) \int_{\pi/6}^{\pi/3} e^{\theta E(\alpha)} d\alpha$$

ただし θ は式(26)により定める。間隙率 $E(\alpha)$ の最大値は式(52)より $\alpha = \pi/4$ のときであり、最小値は $\alpha = \pi/6, \pi/3$ のときとる。これらの値をそれぞれ E_1, E_0 とすれば $E_0 = 1 - \sqrt{3}\pi/6 = 0.0931\dots$

$$(56)$$

$$E_1 = 1 - \pi/4 = 0.2146\dots$$

となる。式(26)から、 E が $[E_0, E_1]$ の区間を動くとき、共役間隙率 θ は $(-\infty, \infty)$ の区間を動き、その関係は図-5 のようになる。図-6 は式(55)の p を図示したもの

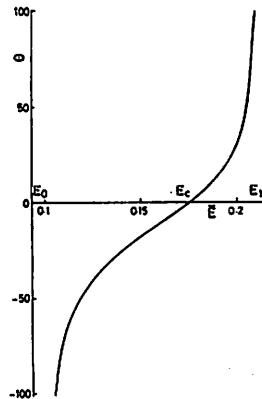


図-5 共役間隙率

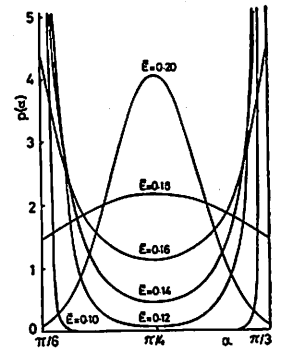


図-6 状態の正準分布

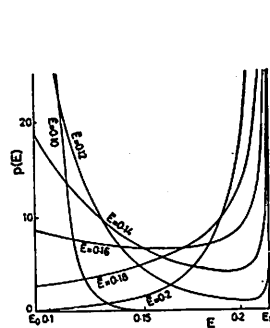


図-7 間隙率の正準分布

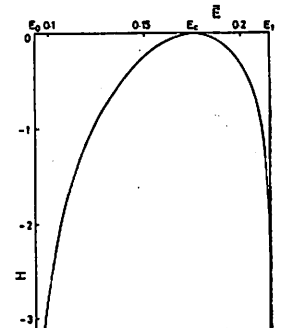


図-8 粒状体のエントロピー

である。横軸の両端 $\alpha = \pi/6, \pi/3$ が最密な状態で、中央 $\alpha = \pi/4$ が最も粗な状態である。 \bar{E} が E_1 に近いときは中央部分の占める割合が大きく、密になって \bar{E} が E_0 に近づくと、両側の部分がふえてくる。これを E 軸上の分布に変換したものが図-7である。この正準分布に対するエントロピー $H(\bar{E})$ は式(27)より図-8 のようにな

る。これはエントロピーが不確定度を表すことから予想がつく。すなわち $E=E_0, E_1$ の状態はそれぞれ最密、最粗な状態であり、全く純粋な固有状態から成る極めて「特殊」な状態である。一方、中間の状態は多くの種類の固有状態の混合であり「混沌」としているためエントロピーが大きくなるのである。エントロピーが最大となるのは式(29)より $\theta=0$ の場合である。このときの間隙率 E_c は

$$E_c=0.1760\dots \quad (57)$$

である。また α 上の分布 $p(\alpha)$ は一様分布となる。

7. 非可逆過程とダイレイタンス

前節では静的なサンプルの統計的性質を調べたが、次にそれらが変形とともにどのように変化するかを考える。これは5節のモデルでは完全には決定できない。初期の β の値ごとにそれぞれ円筒上を平行な軌跡を描いて回るのは分かったが、それらの回転速度が定まらない。すなわち粒子接点での Coulomb 則のみでは、すべり方向は定まっても速度までは定まらない。これを決めるには実験装置とその荷重方法まで考慮する必要がある。そこで、ここでは統計力学的類似による大胆な仮説を検討することにする。気体分子運動論では衝突による分子速度分布の変化は Boltzmann 方程式によって近似的に記述されるが、これにより系のエントロピーは増大するという有名な H 定理が証明できる。その結果、分子の速度分布は Maxwell 分布に収束することが分かる。粒状体では Boltzmann 方程式に相当するものが得られていないが、かわりに H 定理に相当するものを仮定してみよう。すなわち、(1)変形とともにエントロピー H は増大する、(2)変形の各段階で内部の状態は正準分布である、を仮定することにする。(1)は変形とともに内部の不確定度が増し、純粋の固有状態は減少することを意味する。(2)は変形の履歴を無視することを意味する。その理由は次の通りである。今、二つの同一のサンプルを用意し、それぞれ別々の荷重、変形を経て同一の平均間隙率に到達したとする。このとき両者の接触角 α の分布(これが平均間隙率を規定する)は同一であると考えてよいであろう。両者の内部構造が異なっているとすれば、特定の方向の変形を受けたことによって粒子の接触方向 β の分布も特定の方向にかたよって、いわゆる構造異方性(ファブリック)が発達しているかも知れない。したがって、両者に新たに同一の変形を生じさせるための荷重もそれぞれ異なることも考えられる。しかし、本理論では平均間隙率と変形とのみを考慮しており、平均間隙率に影響を与えない接触方向 β の分布は考えておらず、また定まった変形を生じさせるための荷重の大きさも考えていない。ここで考えているのは接触角

α の分布(したがって平均間隙率)と変形との関係という純粋に幾何学的な関係であるから、変形を受けた後のサンプルも変形を受けないランダムなサンプルも平均間隙率が同一であればともに α は最もランダムな正準分布に従っていると考えて差しつかえないであろう。

変形を表す尺度を ϵ とする。例えば x 軸方向のひずみ(圧縮が正)をとる。エントロピーが増大することは $dH/d\epsilon > 0$ と表せるが、 $dH/d\epsilon$ は ϵ を含まないはずである。なぜなら、仮定(2)より変形の各段階でサンプルの統計的性質が過去にうけた変形量にはよらず、現在の正準分布の形のみによるからである。したがって $dH/d\epsilon$ は平均間隙率 \bar{E} あるいはそれと同等な共役間隙率 θ のみの関数である。

$$dH/d\epsilon = F(\theta) \quad (58)$$

とおけば $\theta=0$ のときエントロピーが最大になるのであるから

$$F(\theta) \geq 0 \quad (\text{等号は } \theta=0) \quad (59)$$

となる。式(29)より $dH = -\theta d\bar{E}$ であるから、

$$d\bar{E}/d\epsilon = -F(\theta(\bar{E}))/\theta(\bar{E}) \quad (60)$$

となる。右辺は $\theta > 0$ なら負で $\theta < 0$ なら正である。すなわち $E_0 \leq \bar{E} < E_c$ のときは \bar{E} が増加し、 $E_c < \bar{E} \leq E_1$ のときは \bar{E} が減少することを意味する。これは粒状体のダイレイタンスを表す式にほかならない。式(60)の解は

$$\epsilon(\bar{E}) = -\int_{\bar{E}_1}^{\bar{E}} \theta(\xi) d\xi / F(\theta(\xi)) \quad (61)$$

である。ただし \bar{E}_1 は初期間隙率である。式(59)を満たす最も簡単な関数として $F(\theta) = K\theta^2$ (K は定数)を選んだ場合のダイレイタンスを図示したものが図-9であり、ダイレイタンスの性質をよく表しているといえる。ただし、図-4に示してあったような初期移動を考慮していない。これを考慮すると $\epsilon=0$ の付近で一旦間隙率が減少しなければならないことが分かる。(小田らの実験でもその傾向が見られる^{21)~23)}) ϵ が大きくなり間隙率がほぼ一定となる最終の間隙率 E_c が Roscoe⁹⁾ のいう臨界間隙率にほかならない。その後の変形が金谷^{9)~8)} の調べた塑性流動の領域であると考えられる。

以上の議論を状態遷移の保測性を仮定し、エルゴード性を示すことによって証明しよう。5節の結果によれば状態は二つの円筒上で互いに平行な周期軌道を描いている。状態遷移速度は各軌道ごとに一定で、隣接する軌道に対して連続的に変化するものとする。各固有状態をもつ小領域間の不規則な相互作用(いわば雑音)を考えなければ円筒上の変換は保測変換である。すなわち、円筒上のある領域 \mathcal{D} をとり、 \mathcal{D} 内の点がある時間後移動して別の領域 \mathcal{D}' になったとすれば \mathcal{D} と \mathcal{D}' との面積(測度)は等しい。エントロピーが増加するという事は状態空

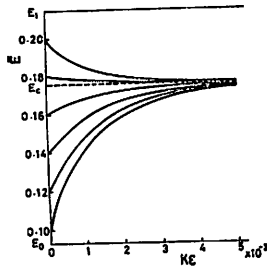


図-9 粒状体のダイレイタンス ($F(\theta)=K\theta^2$)

間上の確率分布が任意の初期分布に対して一様分布に収束すること(エルゴード性の定義)に同値である。一見すると、このエルゴード性は成立しないように思える。なぜならエントロピーの定義式(15)より保測変換はエントロピーの積分の単なる変数変換を引き起こすだけでエントロピーが一定になるからである。また、例えばある領域の確率が0であればいつまでたってもその領域の面積に等しい領域上で確率が0であるから一様分布には収束しないように思える。しかし、確率分布の複雑な凹凸をならして「平均的」にみれば、しだいに一様分布に近づくのである*。これらは統計力学で議論されている。すなわち、任意の質点系の状態は一般化座標とその Hamilton 関数共役な一般化運動量とによって指定されるが、その状態空間(相空間)上の遷移は Liouville の定理により保測変換であり、エルゴード性の成立をめぐる多くの議論がある³¹⁾。粒状体では次のように証明される。 α の座標軸を傾けて、軌道は $\beta = \text{const.}$ であるようにとる。 α の区間 $[\pi/6, \pi/3]$ を周期的に $(-\infty, \infty)$ に延長する。 $t=0$ での分布を $p(\alpha)$ とすればこれは周期 $\pi/6$ の周期関数であるから Fourier 級数

$$p(\alpha) = p_0 + \sum_k p_k e^{-12iak} \quad (62)$$

に展開できる。時刻 t での分布は $p(\alpha, \beta, t) = p(\alpha - \nu(\beta)t)$ となる。ただし $\nu(\beta)$ は軌道 β 上の状態遷移速度である。対称性より $0 < \beta < \pi/6$ のみ考える。 $f(\beta)$ を任意の連続関数とすると

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/6} f(\beta) p(\alpha, \beta, t) d\beta \\ &= \int_0^{\pi/6} p_0 f(\beta) d\beta + \sum_k p_k e^{-12iak} \int_0^{\pi/6} f(\beta) e^{12i\nu(\beta)tk} d\beta \\ &= \int_0^{\pi/6} p_0 f(\beta) d\beta \\ &+ \sum_k p_k e^{-12iak} \int_{\nu(0)}^{\nu(\pi/6)} f(\beta) e^{12i\nu(\beta)tk} (d\beta/d\nu) d\nu \end{aligned}$$

となる。 $d\beta/d\nu$ が連続であれば最後の積分は $t \rightarrow \infty$ で Riemann-Lebesgue の定理により0となる。これは $t \rightarrow \infty$ で $p(\alpha, \beta, t)$ が p_0 に弱収束、すなわち超関数として

* 例えば水の中に混じり合わない赤い液体を少量入れてかくはんすると全体が一様なピンク色になる。しかし顕微鏡で見れば透明な部分と赤い部分とは、はっきり区別される。

収束することにはかならない。これが「平均的」に一様分布へ収束するという意味である。以上では「雑音」は考えなかったが、もしそれが完全に不規則であれば、分布の一様分布への収束が促進されると考えてよいであろう。

8. ま と め

本論文では粒子の配置に確率分布を考える最上の理論を再検討し、統計的考察の適用可能な範囲を探求した。まず状態空間、状態密度関数、エントロピー等の概念を厳密に規定した。そして正準分布、分配関数などの統計力学との類似性を示した。また Rowe の理論を進展させ、系に含まれている規則配置(固有状態)の状態遷移を調べることにより系の統計的性質を記述しようと試みた。その結果に基づき、エントロピー増大の仮定によりダイレイタンス関係式を得ることを示した。そして、状態遷移の保測性を仮定し、エルゴード性を示すことによって、その証明を与えた。

本論文ではいくつかの仮定のもとに具体例の計算結果を示したが、これらを厳密に実験により検証することは極めてむずかしいと思われる。それは本文中にもふれた、粒子の初期移動の効果のためである。例えば 図-6、図-7 の正準分布に対して、実際に円柱を並べたサンプルをつくと円柱はかなりの部分が最密充填状態に落ち込んでしまい、最密充填状態が圧倒的に多く、それにごく近い状態は0となるような不連続な分布で安定になってしまう。しかし、全体が変形を始めて、各円柱が移動する各瞬間瞬間には図のような連続的な分布になっていると思われる。なぜなら、変形のためには粒子が連続的に各状態を経由しなければならないからである。図-9 のダイレイタンスの場合も同様で、粒子の初期移動をどう取り扱うかが問題となる。これは今後の課題である。

本論文では等径円柱の集合を考えたが、導入された諸概念は一般の粒子系に拡張できる。その厳密な数式表現は著しく困難になるであろうが、具体的な問題に即した簡潔なモデルを構成するための基礎概念を与えることができると思われる。なお、粒状体のような統計が関与する現象では統計力学との類似を考えることが必然となるが、その際、統計力学自体の理論構成、特に状態密度関数の意味を十分考えないと表面的な類似に終わる恐れがある。その点も本論文では綿密に議論したつもりである。

謝 辞

粒状体に Jaynes のエントロピーを導入された Washington 大学の Brown 教授より日米粒状体セミナー(1978, 仙台)において親切に御討論いただいたことに

感謝します。また統計モデルに関して討論下さった北海道大学の新保勝教授、東京大学の島信徳教授に感謝します。最後に、粒状体にエントロピーを初めて導入された最上武雄先生に敬意を表したいと思います。

参 考 文 献

- 1) Drucker, D. C. and Prager, W. (1952): "Soil mechanics and plastic analysis of limit design," *Q. Appl. Math.*, Vol. 10, pp. 157-165.
- 2) Spencer, A. J. M. (1964): "A theory of the kinetics of ideal soils under plane strain conditions," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 12, pp. 337-351.
- 3) Goodman, M. A. and Cowin, S. C. (1971): "Two problems in the gravity flow of granular materials," *J. Fluid Mech.*, Vol. 45, pp. 321-339.
- 4) Goodman, M. A. and Cowin, S. C. (1972): "A continuum theory for granular materials," *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. 44, pp. 249-266.
- 5) 金谷健一(1979): 粒状体の流動の基礎理論(第1報, 非圧縮性の流れ), 「日本機械学会論文集」, Vol. 45, No. 392, pp. 507~514.
- 6) 金谷健一(1979): 粒状体の流動の基礎理論(第2報, 発達した流れ), 「日本機械学会論文集」, Vol. 45, No. 392, pp. 515~522.
- 7) 金谷健一(1979): 粒状体の速度場の理論—関連流動則と特性曲面—, 「土質工学会論文報告集」, Vol. 19, No. 4, pp. 103~112.
- 8) 金谷健一(1979): 粒状体の速度場の理論—弾塑性理論と不連続波動—, 「土質工学会論文報告集」, Vol. 19, No. 4, pp. 113~120.
- 9) Roscoe, K. H., Schöfield, A. N. and Wroth, C. P. (1958): "On the yielding of soils," *Géotechnique*, Vol. 8, pp. 22-53.
- 10) Roscoe, K. H., Schöfield, A. N. and Thurairajah, A. (1963): "Yielding of clays in state wetter than critical," *Géotechnique*, Vol. 13, pp. 210-240.
- 11) Reynolds, O. (1885): "On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact," *Phil. Mag.*, Ser. 5, Vol. 20-127, pp. 469-481.
- 12) Newland, P. L. and Allely, B. H. (1957): "Volume change in drained triaxial tests on granular materials," *Géotechnique*, Vol. 7, pp. 17-34.
- 13) 村山朔郎・松岡 元(1970): 2次元モデルによる粒状体のせん断現象の微視的考察, 「京大防災研年報」, 13-B, pp. 505~523.
- 14) 村山朔郎・松岡 元(1971): 砂と粘土のせん断特性の類似性とそのメカニズムについて, 「京大防災研年報」, 14-B, pp. 551~563.
- 15) 金谷健一(1980): 粒状体の粒子モデルと仮想仕事の原理, 「土質工学会論文報告集」, Vol. 20, No. 3, pp. 111~116.
- 16) Rowe, P. W. (1962): "The stress-dilatancy relation for statistic equilibrium of an assembly of particles in contact," *Proc. Roy. Soc., A*, 269, pp. 500-527.
- 17) Rowe, P. W. (1963): "Stress-dilatancy, earth pressure, and slopes," *Proc., ASCE, SM 3*, Vol. 89, pp. 37-61.
- 18) Horne, M. R. (1965): "The behaviour of an assembly of rotund, rigid, cohesionless particles, I," *Proc. Roy. Soc., A*, 286, pp. 62-78.
- 19) Horne, M. R. (1965): "The behaviour of an assembly of rotund, rigid, cohesionless particles, II," *Proc. Roy. Soc., A*, 286, pp. 79-97.
- 20) Horne, M. R. (1969): "The behaviour of an assembly of rotund, rigid, cohesionless particles, III," *Proc. Roy. Soc., A*, 310, pp. 21-34.
- 21) Oda, M. (1974): "A mechanical and statistical model of granular materials," *Soils and Foundations*, Vol. 14, No. 1, pp. 13-27.
- 22) Oda, M. and Konishi, J. (1974): "Microscopic deformation mechanism of granular materials in simple shear," *Soils and Foundations*, Vol. 14, No. 4, pp. 25-38.
- 23) Oda, M. (1975): "On stress-dilatancy relation of sand in simple shear test," *Soils and Foundations*, Vol. 15, No. 2, pp. 17-29.
- 24) Tokue, T. (1978): "A consideration about Rowe's minimum energy ratio principle and a new concept of shear mechanism," *Soils and Foundations*, Vol. 18, No. 1, pp. 1-10.
- 25) Tokue, T. (1979): "A stress-dilatancy model of granular materials under general stress condition," *Soils and Foundations*, Vol. 19, No. 1, pp. 63-80.
- 26) Mogami, T. (1965): "A statistical approach to the mechanism of granular materials," *Soils and Foundations*, Vol. 5, No. 2, pp. 26-36.
- 27) 最上武雄(編)(1969): 「土質工学」, 技報堂, pp. 998~1032.
- 28) 最上武雄(1973): 「最上武雄博士論文選集」, 東大工学部土木教室.
- 29) 新保勝(1975): 粒状体の確率論的剪断模型, 「材料科学」, Vol. 12, pp. 247~252.
- 30) Kullback, S. (1959): *Information Theory and Statistics*, New York, Wiley.
- 31) Khinchin, A. I. (1949): *Mathematical Foundations of Statistical Mechanics*, New York, Dover.
- 32) 国沢清典(1975): 「エントロピーモデル」, 日科技連.
- 33) 宇野尚雄・福田光治(1975): エントロピー最大原理による粒状体の間隙分布, 「土木学会第30回年次学術講演会講演概要集」, 第3部, pp. 396~397.
- 34) Jowitt, P. W. and Munro, J. (1975): "The influence of void distribution and entropy on the engineering properties of granular media," *Proc. Application of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, DGEG 2*, Aachen, pp. 365-397.
- 35) Brown, C. B. (1978): "The use of maximum entropy in the characterization of granular media," *Proc. US-Japan Seminar on Continuum-Mechanical and Statistical Approaches in the Mechanics of Granular Materials* (Ed. by S. C. Cowin and M. Satake), Tokyo, Gakujutsu Bunkan Fukyukai, pp. 98-108.
- 36) Jaynes, E. T. (1957): "Information theory and statistical mechanics," *Phys. Rev.*, Vol. 106, pp. 620-630.
- 37) Jaynes, E. T. (1957): "Information theory and statistical mechanics II," *Phys. Rev.*, Vol. 108, pp. 171-190.
- 38) Jaynes, E. T. (1963): "New engineering applications of information theory," *Proc. 1st Symp. on Engineering Applications of Random Function Theory and Probability* (Ed. by J. L. Eogdanoff and F. Kozin), New York, Wiley, pp. 163-203.
- 39) Jaynes, E. T. (1963): "Information theory and statistical mechanics," *Statistical Physics III* (Ed. by K. W. Ford), New York, Benjamin, pp. 182-218.

(原稿受付, 1979. 10. 5)