

研究ノート

誘導異方性とその表現

(Induced Anisotropy and Its Representation)

金谷 健 一* (Ken-ichi Kanatani)

キーワード：圧密/異方性/土の構成式/土質力学
一般/変形 (IGC : D 6)

1. 目 的

土質力学では「等方性」を仮定する場合が多い¹⁾。これは解析を容易にするためである。実際、数式のみによって完全に解析できるのは「線形等方性」をもつ物質のみであるといってもよいほどである。もちろん、現実の土は「異方性」をもつが、定義より異方性とは等方性であるものを除いた残りのあらゆるものごとである。したがって、これを一般的に取り扱うことはほぼ不可能であり、理論化するには何らかの制限を設けて、対象の範囲を限定する必要がある。従来、多く取り上げられているのは「線形異方性」、特にその中でも「直交異方性」とよばれるものである。しかし、土は通常、著しい非線形性を示すことが多い。代表的な例はダイレイタンス²⁾であり、これは線形物質にはみられない非線形挙動の典型である^{1),2)}。ところが「非線形異方性」を考えようとするれば、これまた線形異方性を除いた残りすべての異方性であり、対象が無制限に広がってしまう。しかし、これを適当な範囲に限定することが可能である。これが「誘導異方性」という概念である³⁾。厳密な定義は後節で与えるが、一口でいうと、これは元来等方性の物質が内部状態の変化によって見かけ上異方性の挙動を示すようなものである。これは土の一般の変形解析においてしばしば遭遇するものであり、明確な定式化が望まれているものと思われる。

本報告ではまず等方性の厳密な定義を与える。本文で与える定義は物質内部の均一性という意味ではなく、直観と異なるところが多いから誤解を生じやすく、十分注意を要する。等方性の例として砂の変形とファブリックの発達を考える。次に誘導異方性の厳密な定義を与え、その数学的表現を示す。例として重力下の地層と粘土層の異方圧密とを考える。結論として、通常土質力学で遭

遇する異方性の大部分がこの誘導異方性の範囲でモデル化できることが明らかになる。

2. 等方性の表現

直観的には等方性とは物質が均一であり、方向による性質の差のないものと考えたくなる。しかし、例えばそのような鉄板があったとして、それをある定めた x 軸方向に引張ってみる。すると、その鉄板の内部はもはや均一ではない。徹視的に見れば結晶のすべてが x 軸方向にひずんでいる。したがって x 軸方向がそれと垂直な方向とは異なった性質をもっている。このようなものを異方性とよぶことにするならば、常に等方性を保つ固体は剛体以外に存在しないことになる。もちろんこれを誘導異方性とよぶのもおかしい。これはあくまで等方性と考えるほうが自然である。すなわち等方性と均一性とを同一視してはならない。

正確に述べれば、ここで考える等方性、異方性とは“各々の瞬間の状態”を形容するものではなく、その物質の力学的特性、すなわち“構成方程式”を分類する概念である。構成方程式とは考えている複数の力学的変数の間の、その物質特有の関数関係のことである。例えば、考えている変数を $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ としよう。各 ξ_i はスカラーでもベクトルでもテンソルでもよい。このときここで考える等方性とは「それらの変数にある基準値 $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_N$ が存在し、その状態では物質の特性の方向による差が全くないもの」をいう。例えば変数として応力とひずみをとれば、基準状態は双方がともに0の状態にとる。したがって、ここで考える等方性とは各々の瞬間の物質内部の不均一性とは関係なく、ある(仮想的でもいい)均一な基準状態が存在すればよいのである。

以上を数学的に表現するため図-1の例を考えよう。正方形の板を均一な基準状態において x 軸方向に引張り力 T を加えると、 x 軸方向のひずみが ϵ_x であったとする。一方、同じ基準状態において y 軸方向に引張り力 T を加え、 y 軸方向にひずみ ϵ_y を生じたとすれば、基準状態では方向による特性の差がないのであるから $\epsilon_x = \epsilon_y$ でなければならない。これがここで考える等方性の

* 群馬大学工学部情報工学科 助手 (桐生市天神町 1-5-1)
(1981.4.24 原稿受付・討議期限 1983.1.1)

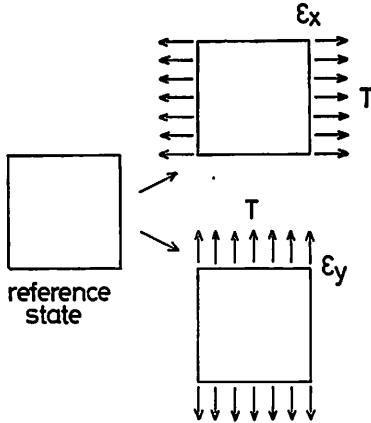


図-1 等方性とは $\epsilon_x = \epsilon_y$ となることである。基準状態では物質が均一でも変形状態ではそうとは限らない

定義であり、重要なのは変形後の内部の不均一については何も述べていないことである。以上を一般化すると次のようになる。基準状態に応力 σ を加え、ひずみ e を得たとする。一方、この基準状態でその応力を直交行列 R だけ回転した向きに加えるということは、テンソル変換則により、応力 $R\sigma R^T$ を加えるということである¹⁾。ただし R^T は R の転置行列である。このとき、等方性の要求することは、ひずみがやはり ReR^T で与えられることである。したがって、もし構成方程式を

$$e = F(\sigma) \quad (1)$$

と表せば、

$$ReR^T = F(R\sigma R^T) \quad (2)$$

が任意の直交行列 R に対して成立しなければならない。これが等方性の定義の数学的表現である。より一般に、考えている変数としてスカラー c 、ベクトル u 、二階のテンソル A, B, C, \dots をとり、構成方程式として、例えば

$$A = F(c, u, B, C, \dots) \quad (3)$$

とする。これが等方性構成方程式である条件は任意の直交行列 R に対して、

$$RAR^T = F(c, Ru, RBR^T, RCR^T, \dots) \quad (4)$$

となることである。

更に時間効果があるとし、時刻 t_0 で均一な基準状態にあったとする。そして時刻 t における A の値は c, u, B, C, \dots の時刻 t_0 から t までのすべての値に依存するとする。これを例えば $c(t_0 \rightarrow t)$ などと書くと、時間効果のある構成方程式

$$A(t) = F(c(t_0 \rightarrow t), u(t_0 \rightarrow t), B(t_0 \rightarrow t), C(t_0 \rightarrow t), \dots) \quad (5)$$

が等方性である条件は任意の直交行列 R に対し

$$RA(t)R^T = F(c(t_0 \rightarrow t), Ru(t_0 \rightarrow t),$$

$$RB(t_0 \rightarrow t)R^T, RC(t_0 \rightarrow t)R^T, \dots) \quad (6)$$

が成立することである。一般に時刻が t_0 から離れるほど内部は不均一になってゆくであろうが、これを「異方性が発達する」などというのは誤解を生じやすい。この混乱を避けるためには、ここでいう力学特性の等方性、異方性を「力学的等方性」、「力学的異方性」とよび、各々の瞬間の内部状態の不均一を形容する場合には「物理的異方性」などとよぶのも一法であろう。しかし、後者は力学的特性と直接には関係がなく、例えば「等方性構成方程式」などという場合には本文の意味に解釈しなければならない。

なお、定義より明らかであるが、構成方程式の表現においては基準状態に正規直交座標系をとっているものとする。これは微小変形を考えている限り問題とはならないが、もし有限変形を考えるなら基準状態にとった物質座標系と変形後の空間座標系とははっきり区別しなければならない。以下、本文では有限変形は考えない。

3. 等方性構成方程式の表現

以下、代表的な場合の、等方性構成方程式がとらなければならない形を整理する^{4)~6)}。以下で c はスカラー、 u, v, w, \dots はベクトル、 A, B, C, \dots は二階の対称テンソルとする。 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ は () の中に列挙されているスカラー不変量のスカラー関数である。 $\| \cdot \|$ はベクトルのノルム、 \cdot は内積、 Tr は行列のトレース、 I は単位行列を表す。

- (0) $c = c(u, v, \dots, A, B, \dots)$: c は u, v, \dots, A, B, \dots の不変量 (以下の () の中参照) のスカラー関数。
- (1) $u = u(v)$: $u = \alpha_0 v$, ($\|v\|$)
- (2) $u = u(v, w)$: $u = \alpha_0 v + \alpha_1 w$, ($\|v\|, \|w\|, v \cdot w$)
- (3) $u = u(A)$: 存在しない。
- (4) $u = u(A, B)$: 存在しない。
- (5) $u = u(v, A)$: $u = \alpha_0 v + \alpha_1 Av + \alpha_2 A^2 v$, ($\|v\|, \text{Tr} A, \text{Tr} A^2, \text{Tr} A^3, v^T Av, v^T A^2 v$)
- (6) $A = A(u)$: $A = \alpha_0 I + \alpha_1 uu^T$, ($\|u\|$)
- (7) $A = A(u, v)$: $A = \alpha_0 I + \alpha_1 uu^T + \alpha_2 vv^T + \alpha_3 (uv^T + vu^T)$, ($\|u\|, \|v\|, u \cdot v$)
- (8) $A = A(B)$: $A = \alpha_0 I + \alpha_1 B + \alpha_2 B^2$, ($\text{Tr} B, \text{Tr} B^2, \text{Tr} B^3$)
- (9) $A = A(B, C)$: $A = \alpha_0 I + \alpha_1 B + \alpha_2 B^2 + \alpha_3 C + \alpha_4 C^2 + \alpha_5 (BC + CB) + \alpha_6 (B^2 C + CB^2) + \alpha_7 (BC^2 + C^2 B)$, ($\text{Tr} B, \text{Tr} B^2, \text{Tr} B^3, \text{Tr} C, \text{Tr} C^2, \text{Tr} C^3, \text{Tr} BC, \text{Tr} B^2 C, \text{Tr} BC^2, \text{Tr} B^2 C^2$)
- (10) $A = A(u, B)$: $A = \alpha_0 I + \alpha_1 uu^T + \alpha_2 B + \alpha_3 B^2 + \alpha_4 (Buu^T + uu^T B) + \alpha_5 (B^2 uu^T + uu^T B^2)$, ($\|u\|, \text{Tr} B, \text{Tr} B^2, \text{Tr} B^3, u^T Bu, u^T B^2 u$)

4. 砂の変形とファブリック

等方性の例として砂の変形を考える。初期状態として試験器に砂を均一に設置したとする。すると、これに荷重を加えてゆく場合、その後内部にどんな不均一が生じようと、この砂の特性は“定義によって等方性”である。(初期状態が基準状態である。)さて、応力テンソルの増分 $d\sigma$ がひずみテンソルの増分 de によって

$$d\sigma = F(de) \quad (7)$$

で表されるとすれば、これは前節(8)で $A \rightarrow d\sigma, B \rightarrow de$ としたものでなければならない。しかし、もしそうだとすれば $d\sigma$ と de とは主軸が一致しなければならない。ところが小田や小西の実験からも分かるように、必ずしもこの共軸性は見られない^{9),10)}。一方、定義より等方性でなければならないから、これは更に別のテンソル量に関係していることを意味する。これは等方性の定義から直ちに分かることでもある。すなわち、力学変数として $d\sigma$ と de とのみを考えたのでは、これら両方の量を 0 としても基準状態(すなわち初期状態)とは限らない。したがって、内部の状態の初期状態からの隔たりを表す二階対称テンソル D を導入し、小田にならって“ファブリックテンソル”とよぼう^{11),12)}。この定義の仕方にはいろいろ考えられるが、要はその主軸が物質内の不均一の対称軸と一致しており、その固有値が各方向についての不均一の程度を記述するものであればよい¹³⁾。初期状態では D が I に一致するように定義を定めておけば、 $d\sigma, de, D$ をそれぞれ基準値 $0, 0, I$ としたときが均一な基準状態であるから、この3変数によって初めて“等方性”が記述できる。なお、次節との対比として、この3変数は“変形とともに変化する力学変数”であることに注意しておこう。構成方程式を

$$d\sigma = F(de, D) \quad (8)$$

とすれば前節(9)で $A \rightarrow d\sigma, B \rightarrow de, C \rightarrow D$ としたものでなければならない。その結果、 $d\sigma$ と de は必ずしも共軸ではない。特に de に関しては線形であるとする

$$d\sigma = (\text{Tr} de)D_1 + (\text{Tr} D de)D_2 + (\text{Tr} D^2 de)D_3 + \text{Sym}(de, D_4) \quad (9)$$

$$D_\alpha = \beta_{\alpha 0} I + \beta_{\alpha 1} D + \beta_{\alpha 2} D^2 \quad \alpha = 1, 2, 3, 4 \quad (10)$$

の形でなければならない。ただし、対称操作 $AB + BA$ を $\text{Sym}(A, B)$ と書いた。 $\beta_{00} \sim \beta_{42}$ は de にはよらない、 $\text{Tr} D, \text{Tr} D^2, \text{Tr} D^3$ 、あるいは D の3固有値のみのスカラー関数である。実際問題としてはこれらから適当な項のみを残したモデルをたて、実験との比較を行って詳しい形を決めなければならないが、このような考察は“等方性”という概念が“均一性”あるいは“物理的異方性”とは別の概念であることを示す典型的な例である

う。なお、小田や小西の実験では D は応力テンソル σ と共軸であることが観測されている^{9)~15)}。

もうひとつ非共軸性の例を述べれば、土の塑性流動の理論において、Drucker-Prager 流の関連流動則を用いれば応力 σ とひずみ速度 \dot{e} とは常に共軸になるが^{16)~18)} Spencer らの“二重すべり”理論では必ずしも σ と \dot{e} とが共軸ではない¹⁹⁾。これはその理論の中に更に応力速度 $\dot{\sigma}$ が導入されているためである。これらはすべて“等方性”の理論であり、“異方性”とはまったく無関係であることに注意しなければならない。

5. 異方性と誘導異方性

異方性とは等方性以外のもの、すなわち、考えている力学変数をどんな値にしても均一な基準状態の得られないものをいう。例えば一方向に鉄筋の平行にはいったコンクリートなどがそうであって、その不均一は物質固有のものであり、“考えている力学変数の値による影響”とは別のものである。このような物質の構成方程式をテンソル関係式で表すことは複雑さのためほぼ不可能といってもよい。実際問題としては、テンソル関係式で表すことをやめて、その物質に固有な不均一の対称軸を座標軸にとり、その座標系による成分で表すのが普通である。例えば、ある基準状態において物質に3つの直交した方向があって、それらのまわりの 180° 回軸に対して特性が変化しないものであれば、それらの方向に座標軸をとるのが便利である。しかし、その結果得られるものは座標変換に不変なテンソル関係式¹⁾ではなく、あくまで特殊な座標系でのみ成立する“成分の間の式”であることに注意しなければならない。

このように、一般には異方性構成方程式をテンソル関係式で表すことが困難であるが、例外的なのが次に述べる「誘導異方性」である。ある等方性物質を考え、その力学変数を $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ とし、基準状態をそれぞれが $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_N$ のときであるとする。このとき、例えば ξ_1 を $\bar{\xi}_1$ とは異なる別の値 ξ_1' に固定したとしよう。すると、 $\xi_2 = \bar{\xi}_2, \xi_3 = \bar{\xi}_3, \dots, \xi_N = \bar{\xi}_N$ としても、もはや均一な基準状態が得られない。したがって、この物質で、もし ξ_1 を ξ_1' に固定して、 $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_N$ のみが自由に値をとることのできる力学変数であるとみなせば、これは等方性とはいえない。このような“見かけの異方性”を誘導異方性と定義しよう。例えば2節(3)式を考えると(4)式が成立するが、もし B を基準値ではないある値 B_0 に固定して、 A を c, u, C, \dots の関数とみれば一般に

$$RAR^T \cong F(c, Ru, B_0, RCR^T, \dots) \quad (11)$$

である。すなわち誘導異方性を示す。

6. 重力による堆積

誘導異方性は異方性に対する強い制限であるから、モデルの範囲を限定する。これはいろいろな異方性に対する構成方程式を考えるのに役立つ。例として重力下の堆積層を考える。これは異方性の代表的な例であるが、これを誘導異方性とみなして、構成方程式を

$$\sigma = \sigma(g, e) \quad (12)$$

とおく。ただし g は重力加速度ベクトルである。すなわち、仮想的に重力 g (方向と大きさ) を自由に变化させることができると考えて、 $g=0, e=0$ のときが均一な基準状態であるような等方性を考えるのである。そして、現在の異方性は g が一定値に固定されているために生じる誘導異方性と考えてるのである。すると (12) 式の形は3節 (10) において $A \rightarrow \sigma, u \rightarrow g, B \rightarrow e$ としたものでなければならない。特に e に関して線形であると仮定してみると

$$\sigma = (\lambda \text{Tre} + c_1 g^T e g) I + (c_1' \text{Tre} + c_2 g^T e g) g g^T + \text{Sym}(e, \mu I + c_3 g g^T) \quad (13)$$

となる。ただし $c_1, c_1', c_2, c_3, \lambda, \mu$ は重力の大きさによって決まる定数である。 λ, μ は $g=0$ のときの等方性線形構成方程式の Lamé の定数である。更に仕事 $\int \text{Tr} \sigma de$ がひずみ経路によらない、すなわち応力がポテンシャル ϕ によって $\sigma = \partial \phi / \partial e$ の形に導かれるとすると $c_1 = c_1'$ でなければならない。これは ϕ の形が

$$\phi = \frac{1}{2} \lambda (\text{Tre})^2 + \mu \text{Tre}^2 + c_1 g^T e g \text{Tre} + \frac{1}{2} c_2 (g^T e g)^2 + c_3 g^T e^2 g \quad (14)$$

でなければならないからである (3節参照)。ここで (13) 式の g を z 軸方向の単位ベクトルとしてみると、これはよく知られた横断等方性の線形構成方程式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= (2\mu + \lambda)e_{11} + \lambda e_{22} + (\lambda + c_1)e_{33} \\ \sigma_{22} &= \lambda e_{11} + (2\mu + \lambda)e_{22} + (\lambda + c_1)e_{33} \\ \sigma_{33} &= (\lambda + c_1)e_{11} + (\lambda + c_1)e_{22} + (2\mu + \lambda + 2c_1 + c_2 + 2c_3)e_{33} \\ \sigma_{12} &= 2\mu e_{12}, \quad \sigma_{23} = (2\mu + c_3)e_{23}, \\ \sigma_{31} &= (2\mu + c_3)e_{31} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

となっていることが分かる。定数の数は $\lambda, \mu, c_1, c_2, c_3$ の5個であり、これ以上減らすことは一般にはできない。

7. 粘土層の異方圧密

粘土層の圧密において間隙比 e が有効応力 σ' の等方スカラー関数

$$e = F(\sigma') \quad (16)$$

とすると、3節 (0) にもあるように e は σ' の3つの

不変量のみ関数として、例えば

$$e = F(\text{Tr} \sigma', \text{Tr} \sigma'^2, \text{Tr} \sigma'^3) \quad (17)$$

と表されなければならない。しかし、実際には異方性の影響で必ずしもこうは書けない。そこで、これを、正規圧密完了時の有効応力 σ_0' を導入した誘導異方性とみなしてみよう。すなわち

$$e = F(\sigma_0', \sigma') \quad (18)$$

と考へ、 σ_0' も自由にとりうるとした場合の $\sigma_0' = 0, \sigma' = 0$ の仮想的状態を基準状態とみなし、この等方性が現在 σ_0' を固定しているために誘導異方性を示していると考えるのである。すると3節の結果より、 e は σ_0' と σ' とのスカラー不変量、すなわち $\text{Tr} \sigma_0', \text{Tr} \sigma_0'^2, \text{Tr} \sigma_0'^3, \text{Tr} \sigma', \text{Tr} \sigma'^2, \text{Tr} \sigma'^3, \text{Tr} \sigma_0' \sigma', \text{Tr} \sigma_0'^2 \sigma', \text{Tr} \sigma_0'^3 \sigma', \text{Tr} \sigma_0' \sigma'^2$ のみのスカラー関数である。しかし σ_0' は固定されているので結局

$$e = F(\text{Tr} \sigma', \text{Tr} \sigma'^2, \text{Tr} \sigma'^3, \text{Tr} \sigma_0' \sigma', \text{Tr} \sigma_0'^2 \sigma', \text{Tr} \sigma_0'^3 \sigma', \text{Tr} \sigma_0'^2 \sigma'^2) \quad (19)$$

のみを考えればよい。これらの不変量を組み合わせたパラメーターとしては、例えば関口、太田の用いた

$$\begin{aligned} p_0 &= -\frac{1}{3} \text{Tr} \sigma_0, \quad p = -\frac{1}{3} \text{Tr} \sigma \\ \eta^{*2} &= \frac{3}{2} \text{Tr} \left(\frac{\sigma'}{p} - \frac{\sigma_0'}{p_0} \right)^2 \\ &= \frac{27}{2} \left(\frac{\text{Tr} \sigma_0'^2}{(\text{Tr} \sigma_0')^2} + \frac{\text{Tr} \sigma'^2}{(\text{Tr} \sigma')^2} - \frac{2 \text{Tr} \sigma_0' \sigma'}{\text{Tr} \sigma_0' \text{Tr} \sigma'} \right) \quad (20) \end{aligned}$$

などがある²⁰⁾。もし e をこれらのみで表すとすれば、結局 (19) 式を

$$e = F(\text{Tr} \sigma', \text{Tr} \sigma_0' \sigma', \text{Tr} \sigma'^2) \quad (21)$$

の形に帰着させた誘導異方性のモデルを考えていることになる。

8. ま と め

本報告ではまず誤解を生じやすい「等方性」を厳密に定義した。本文で考えたのは物質内部の均一性という意味ではなく、考えている変数のとり方によって均一な基準状態が存在するという意味であり、これを数学的に表現し、等方性構成方程式のとるべき形を整理した。例として砂の変形とファブリックを考えた。次に、異方性一般に対する強い制限として「誘導異方性」を厳密に定義した。これは元来等方性の物質が内部変数の状態によって見かけの異方性を示すものであり、その数学的表現を与えた。例として重力下の堆積と粘土層の異方圧密を考えた。結論として、通常土質力学で遭遇する異方性の多くはこの誘導異方性の範囲でモデル化できるといってよいであろう。

参 考 文 献

- 1) 金谷健一 (1981) : せん断, 圧縮と構成方程式, 「土と基礎」, Vol.28, No.275, pp.5~9.
- 2) Kanatani, K. (1981) : Discussion to "Stress-strain relationship of soils as anisotropic bodies under three different principal stresses," Soils and Foundations, Vol.21, No.1, pp.122-124.
- 3) 佐武正雄 (1980) : 粒状体力学へのアプローチ, 「土と基礎」, Vol.28, No.275, pp.1~4.
- 4) Spencer, A. J. M. (1971) : "Theory of invariants," Continuum Physics, Vol.1 (ed. by A. C. Eringen), New York/London, Academic Press, pp.239-353.
- 5) Wang, C.-C. (1970) : "A new representation theorem for isotropic functions, Part 1," Arch. Rational Mech. Anal., Vol.36, pp.166-197.
- 6) Wang, C.-C. (1970) : "A new representation theorem for isotropic functions, Part 2," Arch. Rational Mech. Anal., Vol.36, pp.198-223.
- 7) Smith, G. F. (1971) : "On isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors," Int. J. Engng Sci., Vol.9, pp.899-916.
- 8) Wang, C.-C. (1971) : "Conigendum to my papers on "representation for isotropic functions", Arch. Rational Mech. Anal., Vol.43, pp.392-395.
- 9) Oda, M. and Konishi, J. (1974) : "Microscopic deformation mechanism of granular material in simple shear," Soils and Foundations, Vol.14, No.4, pp.25-38.
- 10) Oda, M. and Konishi, J. (1974) : "Rotation of principal stresses in granular material during simple shear," Soils and Foundations, Vol.14, No.4, pp.39-53.
- 11) Oda, M., Nemat-Nasser, S. and Mehrabadi, M. M. (1982) : "A statistical study of fabric in a random assembly of spherical granules," Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech. (in print).
- 12) Mehrabadi, M. M., Nemat-Nasser, S. and Oda, M. (1982) : "On statistical description of stress and fabric in granular materials," Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech. (in print).
- 13) 金谷健一 (1980) : 粒状体の粒子モデルと仮想仕事の原理, 「土質工学会論文報告集」, Vol.20, No.3, pp.111~116.
- 14) 金谷健一 (1981) : 粒状体のファブリックテンソルとその構成式, 「第16回土質工学研究発表会講演集」, pp.433~436.
- 15) Kanatani, K. (1981) : "A theory of contact force distribution in granular materials," Powder Technology, Vol.28, No.2, pp.167-172.
- 16) Drucker, D. C. and Prager, W. (1952) : "Soil mechanics and plastic analysis of limit design," Q. Appl. Math., Vol.10, No.2, pp.157-165.
- 17) 金谷健一 (1979) : 粒状体の速度場の理論——関連流動則と特性曲面——, 「土質工学会論文報告集」, Vol.19, No.4, pp.103~112.
- 18) 金谷健一 (1979) : 粒状体の速度場の理論——弾塑性理論と不連続波助——, 「土質工学会論文報告集」, Vol.19, No.4, pp.113~120.
- 19) Spencer, A. J. M. (1964) : "A theory of the kinematics of ideal soils under plane strain conditions", J. Mech. Phys. Solids, Vol.12, pp.337-351.
- 20) Sekiguchi, H. and Ohta, H. (1977) : "Induced anisotropy and time dependency in clays," Proc. Specialty Session 9, 9th Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Tokyo, pp.229-238.

注意) 上記5), 6)には一部誤りがある。これは7)で指摘され、8)で訂正されている。4)はそれまでの成果のまとめであり、5)~8)がそれを発展させたものである。