

粒状体の速度場の理論

—弾塑性理論と不連続波動—

(A Theory for the Velocity Field of Granular Materials)
—Elastic-plastic Theory and Discontinuity Waves—

金 谷 健 一* (Ken-ichi Kanatani)

キーワード：応力／降伏／塑性／弾性／土質力学
〔一般〕／内部摩擦角／粘着力／波動
／粒状体
IGC： E0/E8/D6

1. ま え が き

前報¹⁾では粒状体の降伏後の流動を塑性論の立場より展開した。まず関連流動則に関する Drucker の理論を検討し、運動の拘束条件とその拘束応力とを考慮して新しい関連流動則の表現を得た。また特性曲面と不連続量との関係も論じた。そして Coulomb 則に由来する拘束条件を指摘し、拡張 Mises 則により非圧縮性完全塑性流動の方程式を導いた。結果は金属塑性論の Levi-Mises 理論²⁾の拡張であることが分かった。これに関する特性曲面を解析し、二種類の特性曲面を求めて、その不連続の大きさも計算した。更に変分原理による定式化も行い、斜面上の流動の安定性を考察した。しかし、完全塑性流動では応力とひずみ速度との間に一対一対応がつかず、多くの点で流れの不定性が生じる。本論文ではこれに弾性ひずみ成分を考慮した弾塑性理論を前報と同様の数学的手法で展開する。これは金属塑性論の Prandtl-Reuss の理論³⁾の拡張になっていることが分かる。金属塑性論の Mises 則を拡張して粒状体の拡張 Mises 則が得られたように、前報の理論を拡張 Levi-Mises 理論、本論文のものを拡張 Prandtl-Reuss 理論とよぶこともできるであろう。

弾性ひずみ成分を流れの中で定義するときには常にその時間変化の記述法が問題となる。本論文ではまずそこに現れる Euler 微分, Lagrange 微分, Jaumann 微分, Lie 微分等を考察する。そして塑性成分と弾性成分とを合わせた構成式を導く。次に伝播する不連続波動を解析する。その結果、不連続面の伝播速度及びその面が

静止し得る条件が明らかになる。特に弾性域と塑性域とが隣接していれば、その境界は不連続面であり、その存在できる条件も明らかになる。

本理論は連続体力学の一般的議論であり、対象としては等方的、かつ前報で定式化した意味での関連流動則が適用できる理想的な材料であり、これをそのまま具体的な問題に適用することはできない。しかし、前報の完全流動状態が前報でも示したように土石流などの大域的な流動にあてはまるのに対し、本理論の対象として例えば粘性土地盤の支持力の問題を考えることができる。従来は地盤の変形の解析は破壊以前のひずみ硬化体に限られていたように思われる。しかし、実際は地盤の一部がピーク強度を越え、臨界状態に入っても大域的な破壊には至らない場合もある。このような場合の解析を行うためには、本論文でとり上げたような弾性域と塑性域とが不連続面を介して隣接している状態の力学的挙動を十分知っておく必要がある。最近ではこのような場合も含めた地盤の塑性論による有限要素解析の試みもみられるが³⁾、本研究はそのような解析の理論的基盤を与えるものと思う。

2. 弾性ひずみの構成方程式

前報¹⁾と同様にひずみ速度を

$$E_{ji} = \partial_{(j} v_{i)} \quad (1)$$

とする。 v_i は速度ベクトルであり $\partial_i = \partial/\partial x^i$ である。指標に関する総和規約等のテンソル記法を以下に用いる。座標系は原則として直交座標を用い、共変成分, 反変成分の区別をしない。したがって v_i と v^i とは同じ量である。指標を囲む () は対称化を, [] は反対称化を表す。すなわち A_{ji} を任意のテンソルとするとき次のように約束する。

$$A_{(ji)} = \frac{1}{2} (A_{ji} + A_{ij}), \quad A_{[ji]} = \frac{1}{2} (A_{ji} - A_{ij}) \quad (2)$$

本論文ではひずみ速度 E_{ji} を式 (1) で定義するが、ひ

* 群馬大学工学部情報工学科 助手 (桐生市天神町 1-5-1)

• この論文に対するディスカッションは昭和55年10月1日までにご投稿下さい。

ずみは定義しない。ひずみを定義するにはある静止した基準状態と対応させ、変位を比較しなければならないが、粒状体のように内部で次々とすべりが生じて塑性変形が進行している場合、このような基準状態は考えにくい。一方、ひずみ速度 (1) には付録 A で示すように、厳密な微分幾何学的解釈ができる。したがってこれは微少変形理論の変位を u_i としたときのひずみ $e_{ji} = \partial_{(j} u_{i)}$ の時間微分 \dot{e}_{ji} とは異なる概念である。

さて、式 (1) のひずみ速度を弾性成分 E_{ji}^e と塑性成分 E_{ji}^p とに分ける。

$$E_{ji} = E_{ji}^e + E_{ji}^p \quad (3)$$

このことは速度 v_i を弾性成分と塑性成分とに分けることを意味しているのではない。変位や速度は場の運動で一意的に定まるもので、これを弾性成分、塑性成分に分けて考えることはできない。ここで意味するのは応力 σ^{ji} に寄与するのは E_{ji} そのものではなく E_{ji}^e であり、その残りを E_{ji}^p とおくとということである。したがって、 E_{ji}^e, E_{ji}^p はそれぞれ、それが速度場により式 (1) の形に導かれるための適合条件⁴⁾

$$\partial_{[i} \partial_{[k} E_{j]i}^e = 0, \quad \partial_{[i} \partial_{[k} E_{j]i}^p = 0 \quad (4)$$

を満たしているとは限らない。ただし指標間の $||$ はその内側の指標を除いて () や [] を適用すべきことを意味している。

さて、 E_{ji}^e を弾性ひずみ速度とすれば、これによって定まるのは応力速度であるから、応力テンソルを σ^{ji} として応力速度の構成方程式を

$$\frac{D\sigma^{ji}}{Dt} = \mathcal{F}^{ji}(E_{ik}^e, \sigma^{ik}, v^k, \partial_i v^k, \partial_m \partial_i v^k, \dots) \quad (5)$$

とおこう。このとき左辺の時間微分をどう定義すべきかに関して従来混乱が起きがちであったが、ここで詳しく検討してみる。まず考えられるものは

$$\text{Euler 微分:} \quad \frac{\partial \sigma^{ji}}{\partial t} \quad (6)$$

$$\text{Lagrange 微分 (追跡微分):} \quad \frac{\partial \sigma^{ji}}{\partial t} + v^k \partial_k \sigma^{ji} \left(\equiv \frac{d\sigma^{ji}}{dt} \right) \quad (7)$$

$$\text{Jaumann 微分 (共回転微分):} \quad \frac{\partial \sigma^{ji}}{\partial t} + v^k \partial_k \sigma^{ji} - \sigma^{kt} \partial_{[k} v_{j]} - \sigma^{jk} \partial_{[k} v_{i]} \quad (8)$$

$$\text{Lie 微分 (物質微分):} \quad \frac{\partial \sigma^{ji}}{\partial t} + v^k \partial_k \sigma^{ji} - \sigma^{kt} \partial_{[k} v_{j]} - \sigma^{jk} \partial_{[k} v_{i]} \quad (9)$$

である。Lagrange 微分は物質中の考えている点とともに並進する座標系からみた時間変化であり、Jaumann 微分は更にその点のまわりの局所的回転に従って回転する直交座標系からみた時間変化であり、Lie 微分⁵⁾ は更にその点のまわりの局所的な一次変形に従って変形する斜交

座標系からみた時間変化である (付録 A 参照)。Lie 微分の場合にはテンソル密度である応力テンソルに $|\det(g_{ji})|^{-1}$ をかけたものを改めて σ^{ji} と考えていることに注意しよう。ただし g_{ji} は空間の計量基本テンソルである。ところで、これらいずれの定義を用いても式 (5) の右辺の関数形 \mathcal{F}^{ji} を適当に選ばずべて同等になる。すなわち、これらの微分はどれを用いても本来、本質的には同等である。しかし、関数形 \mathcal{F}^{ji} にいろいろの単純化を要求すれば、それに適合するもの選択が限定されてくる。例えば、 \mathcal{F}^{ji} が速度 v^i 自身にはよらないと仮定すると、右辺が座標系の並進に不変となるので Euler 微分は適当でない。更に \mathcal{F}^{ji} が v^i の導関数にもよらないと仮定すれば、右辺が座標系の回転に不変となるので Lagrange 微分も適当でない。更に右辺が応力 σ^{ji} にもよらないと仮定してみよう。すると Jaumann 微分を用いることは応力に対するひずみとして無限小弾性論の工学的ひずみを一般化したようなもの考えるのに相当している。一方 Lie 微分を用いることは有限変形弾性論の対数ひずみを一般化したようなもの考えることに相当している。したがって理論構造からは Lie 微分の方が合理的であるともいえるが、Jaumann 微分の方が扱いやすいのでよく用いられる。本論文でも変形がそれほど著しくない場合を考えて Jaumann 微分を用いるが、以上述べたように微分の種類は理論的必然性によって定まるのではなく、我々の構成方程式に対する仮定に依存するものであることに注意すべきである。

本論文では更に微小なひずみ速度を考えて (微小なひずみとは限らない)、線形構成方程式

$$\frac{D\sigma^{ji}}{Dt} = 2\mu E_{ji}^e + \lambda \delta_{ji} E_{kk}^e \quad (10)$$

を仮定する。左辺は式 (8) で定義される。 μ, λ は Lamé の定数に相当する定数であり、特に μ はせん断剛性率に相当する定数である。 σ^{ji}, E_{ji}^e の偏差成分をそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}^{ji} &= \sigma^{ji} - \frac{1}{3} \delta_{ji} \sigma^{kk} \\ \bar{E}_{ji}^e &= E_{ji}^e - \frac{1}{3} \delta_{ji} E_{kk}^e \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

で定義すると式 (10) は次のように分けられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{D\bar{\sigma}^{ji}}{Dt} &= 2\mu \bar{E}_{ji}^e \\ \frac{Dp}{Dt} &= -\kappa E_{kk}^e \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ただし $p (= -(1/3)\sigma^{kk})$ は静圧力であり、 $\kappa = (2\mu + 3\lambda)/3$ は体積圧縮率に相当する定数である。スカラー p の Jaumann 微分は定義より Lagrange 微分に一致する。

3. 弾塑性場の方程式

次に塑性ひずみ速度 E_{ji}^p を考える。これには前報¹⁾

の理論を用いる。前報で述べたように、塑性変形は内部の粒子間のすべりと考えているので、非圧縮性の条件

$$E_{kk}^p = 0 \quad (13)$$

が要求される。偏差成分 \tilde{E}_{jlt}^p については前報で示したように関連流動則が適用できる。応力関係式 (降伏条件) を

$$f(\tilde{\sigma}^{jl}, p) = 0 \quad (14)$$

とする。これより A を比例スカラーとして

$$\tilde{E}_{jlt}^p = A \frac{\partial f}{\partial \sigma^{jl}} \quad (15)$$

を得る。ただし式 (15) は式 (14) で p を定数と考えると、 $\tilde{\sigma}^{jl}$ を式 (11) のように扱って σ^{jl} で微分するものであり、その意味は前報で詳しく論じた。

式 (12) と式 (13), (15) とをあわせれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{D\tilde{\sigma}^{jl}}{Dt} &= 2\mu \left(\tilde{E}_{jlt} - A \frac{\partial f}{\partial \sigma^{jl}} \right) \\ \frac{Dp}{Dt} &= -\kappa E_{kk} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

となる。これは形式的には金属塑性論²⁾の Prandtl-Reuss の方程式に一致している。ただ、関連流動則に特別の解釈を加えているが、それも金属塑性論の場合には従来のものに帰着し、何の変更も生じないことも前報で調べた。式 (16) の A を定めるために式 (14) の時間微分 (D/Dt) をとる。

$$\begin{aligned} \frac{Df}{Dt} &= \frac{\partial f}{\partial \sigma^{jl}} \frac{D\tilde{\sigma}^{jl}}{Dt} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{Dp}{Dt} \\ &= 2\mu \frac{\partial f}{\partial \sigma^{jl}} \left(\tilde{E}_{jlt} - A \frac{\partial f}{\partial \sigma^{jl}} \right) - \kappa \frac{\partial f}{\partial p} E_{kk} = 0 \\ \therefore A &= \frac{\tilde{E}_{jlt} \partial f / \partial \sigma^{jl} - (\kappa/2\mu) E_{kk} \partial f / \partial p}{\partial f / \partial \sigma^{jl} \partial f / \partial \sigma^{jl}} \quad (17) \end{aligned}$$

式 (16) と連続の方程式、運動方程式とをあわせた次の 10 個の方程式が 10 個の独立な変数 $\rho, v^i, \tilde{\sigma}^{jl}, p$ を定める方程式系である。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \partial_i v^i &= 0 \\ \rho \frac{dv^i}{dt} &= -\partial_i p + \partial_j \tilde{\sigma}^{ji} + \rho b^i \\ \frac{D\tilde{\sigma}^{jl}}{Dt} &= 2\mu \left(\tilde{E}_{jlt} - A \frac{\partial f}{\partial \sigma^{jl}} \right) \\ \frac{Dp}{Dt} &= -\kappa E_{kk} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ただし ρ は密度で b^i は単位質量当たりの外力である。 A は式 (17) で与えられる。特に応力関係式 (降伏条件) として前報で用いた拡張 Mises 則

$$f(\tilde{\sigma}^{jl}, p) \equiv \sqrt{\frac{1}{2} \tilde{\sigma}^{jl} \tilde{\sigma}^{jl}} - \alpha p - k = 0 \quad (19)$$

を用いると式 (18) の第三式は次のようになる。

$$\frac{D\tilde{\sigma}^{jl}}{Dt} = 2\mu \tilde{E}_{jlt}$$

$$-\left(\frac{\mu}{(\alpha p + \kappa)^2} \tilde{E}_{ljk} \tilde{\sigma}^{lk} + \frac{\alpha \kappa}{\alpha p + \kappa} E_{kk} \right) \tilde{\sigma}^{jl} \quad (20)$$

拡張 Mises 則、式 (19) を用いる妥当性については前報で詳しく論じた。

式 (19) の定数 α を平面運動の場合に Coulomb 則に一致するように内部摩擦角 α 、粘着力 c と対応づけければ $\alpha = \sin \phi, \kappa = c \cos \phi$ となる (前報¹⁾参照)。

4. 不連続波面の伝播

方程式系、式 (18) に関する不連続波面⁹⁾を解析する。前報でも不連続面を解析したが、完全塑性流動を仮定したためにその不連続面が静止しているか運動しているかどうかは定められなかった。本論文のように弾性ひずみ速度をも考慮すると変形の復元力が存在するので不連続面の伝播速度を求めることができる。方程式系 (18) に現れる未知変数 $\rho, v^i, \tilde{\sigma}^{jl}, p$ の最高階導関数に不連続が生じているとし、その不連続面はその法線 n_i 方向に速度 U で伝播しているとする。このとき運動不連続適合条件⁷⁾⁻¹⁰⁾により次の関係が成立する (付録 B 参照)。

$$\left. \begin{aligned} [\partial_i \rho] &= n_i M, [\partial_t \rho] = -UM, \\ [\partial_j v^i] &= n_j V^i, [\partial_t v^i] = -UV^i, \\ [\partial_k \tilde{\sigma}^{jl}] &= n_k \tilde{\Sigma}^{jl}, [\partial_t \tilde{\sigma}^{jl}] = -U \tilde{\Sigma}^{jl} \\ [\partial_k p] &= n_k P, [\partial_t p] = -UP \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ただし $[\]$ は前報¹⁾で定義したように不連続曲面の n_i の側での値と反対側での値との差である。 ∂_t は $\partial/\partial t$ を意味し、 $M, V^i, \tilde{\Sigma}^{jl}, P$ は次のような法線方向成分の不連続である。

$$\left. \begin{aligned} M &= [\partial_n \rho], V^i = [\partial_n v^i] \\ \tilde{\Sigma}^{jl} &= [\partial_n \tilde{\sigma}^{jl}], P = [\partial_n p] \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

ただし ∂_n は n_i の方向への微分である。式 (21) の関係により、すべての不連続の成分は式 (22) の法線方向の不連続のみで表し得ることが分かる。

ここでは不連続面において速度 v^i 自身は連続と考えているので、不連続面上のいま考えている点の速度が 0 となるような並進座標系をとることにする。方程式系 (18) の不連続 $[\]$ をとると次のようになる。

$$-UM + \rho n_i V^i = 0 \quad (23)$$

$$-\rho UV^i = -n_i P + n_j \tilde{\Sigma}^{ji} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} -U \tilde{\Sigma}^{jl} - \tilde{\sigma}^{kl} n_{[k} V_{j]} - \tilde{\sigma}^{jk} n_{[k} V_{l]} \\ = 2\mu \left(n_{(j} V_{i)} - \frac{1}{3} \delta_{j(i} n_{k} V^{k} - [A] \frac{\partial f}{\partial \sigma^{jl}} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

$$-UP = -\kappa n_k V^k \quad (26)$$

ただし

$$[A] = \frac{n_j V_i \partial f / \partial \sigma^{jl} - (\kappa/2\mu) n_k V^k \partial f / \partial p}{\partial f / \partial \sigma^{nm} \partial f / \partial \sigma^{nm}} \quad (27)$$

(23)~(26) の10個の方程式は10個の変数 $M, V^l, \bar{\Sigma}^{jl}, P$ に対する齊次一次方程式系である。ゆえにその行列式を0とおくことによって U, n_i の満たすべき条件が得られる。しかし、多少の計算によってより簡単な形が導ける。まず式(24)に U をかけたものに(26)を代入して P を消去する。

$$Un_j \bar{\Sigma}^{jl} = -\rho U^2 V^l + \kappa n_j n_l V^j \quad (28)$$

式(25)に n_j をかけたものにこれを代入して $\bar{\Sigma}^{jl}$ を消去する。結果は次のようになる。

$$A_{jl} V^j = 0 \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{jl} &\equiv \left(\mu - \rho U^2 + \frac{1}{2} n_i n_k \bar{\sigma}^{ik} \right) \delta_{jl} \\ &\quad + \left(\frac{\mu}{3} + \kappa \right) n_j n_l + n_{(j} \sigma_{l)k} n_k - \frac{1}{2} \bar{\sigma}^{jl} - \lambda_{jl} \\ \lambda_{jl} &\equiv \frac{2\mu n_i n_k \partial f / \partial \sigma^{ij} \partial f / \partial \sigma^{kl} - \kappa n_j n_k \partial f / \partial \sigma^{kl} \partial f / \partial p}{\partial f / \partial \sigma^{nm} \partial f / \partial \sigma^{nm}} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

これより $V^j = 0$ でないための条件が

$$\det(A_{jl}) = 0 \quad (31)$$

となる。 $U \neq 0$ のときはこれが求める必要十分条件である。なぜなら、 $V^j = 0$ とすると式(23)より $M = 0$, 式(25)より $\bar{\Sigma}^{jl} = 0$, 式(26)より $P = 0$ となり不連続面が存在しなくなる。ゆえに $V^j \neq 0$ 。この解に対し式(23)より M が、式(25)より $\bar{\Sigma}^{jl}$ が、式(26)より P が定まる。このようにして得た $V^l, P, \bar{\Sigma}^{jl}$ は式(24)を満たす。なぜなら、式(25)に n_j をかけたものと式(29)とにより式(28)が導け、これと式(26)とから式(24)が得られるからである。 $U = 0$ のときは $V^j = 0$ でも0でない $M, P, \bar{\Sigma}^{jl}$ をもつ不連続面が存在する可能性がある。このことは後に調べる。

式(31)を計算するためには応力関係式(降伏条件)を与えなければならない。そこで拡張 Mises 則、式(19)を用いると λ_{jl} は次のようになる。

$$\lambda_{jl} = \frac{\mu}{(\alpha p + k)^2} n_i n_k \bar{\sigma}^{ij} \bar{\sigma}^{kl} + \frac{\alpha \kappa}{\alpha p + k} n_j n_k \bar{\sigma}^{kl} \quad (32)$$

更に簡単のために $\sigma^{jl}/\mu \ll 1$ を仮定する。すると式(30)第一式中の $\bar{\sigma}^{jl}$ のはいった項は無視できる。ただし式(32)中の $\bar{\sigma}^{jl}$ の項は無視できない。なぜなら式(32)は応力 σ^{jl} の0次同次式であるからであり、どんなに σ^{jl} が小さくてもその成分間の比は有限となるからである。この結果はちょうど Jaumann 微分を Lagrange 微分で近似したことと同等になっている。このとき、

$$\begin{aligned} A_{jl} &= (\mu - \rho U^2) \delta_{jl} + \left(\frac{\mu}{3} + \kappa \right) n_j n_l \\ &\quad - \frac{\mu}{(\alpha p + k)^2} n_i n_k \bar{\sigma}^{ij} \bar{\sigma}^{kl} - \frac{\alpha \kappa}{\alpha p + k} n_j n_k \bar{\sigma}^{kl} \end{aligned} \quad (33)$$

となる。更に平面運動を考える。運動面を $x-y$ 平面にとり、大きい圧縮力の主軸を y 軸にとる。このとき $E_{xx} = E_{xy} = E_{zz} = 0$ であるから式(20)より分かるように $t=0$ で $\bar{\sigma}^{xx} = \bar{\sigma}^{yz} = \bar{\sigma}^{zz} = 0$ であれば以後の時間でもそうである。ゆえに、前報と同様に

$$\bar{\sigma}^{jl} = \begin{pmatrix} s & & \\ & -s & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad s > 0 \quad (34)$$

とおく。このとき応力関係式(降伏条件)(19)は

$$s = \alpha p + k \quad (35)$$

となる。更に不連続面として $x-y$ 平面に垂直なものを考え、 y 軸とのなす角を θ とする。すると

$$n_i = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad (36)$$

と表せる。以上の結果を式(33)へ代入すると次のようになる。

$$A_{jl} = \begin{pmatrix} \mu - \rho U^2 + \left((1-\alpha)\kappa - \frac{2}{3}\mu \right) \cos^2 \theta & & & \\ \left((1-\alpha)\kappa + \frac{4}{3}\mu \right) \cos \theta \sin \theta & & & \\ 0 & & & \\ \left((1+\alpha)\kappa + \frac{4}{3}\mu \right) \cos \theta \sin \theta & & 0 & \\ \mu - \rho U^2 + \left((1+\alpha)\kappa - \frac{2}{3}\mu \right) \sin^2 \theta & & 0 & \\ 0 & & & \mu - \rho U^2 \end{pmatrix} \quad (37)$$

行列式を0とおくことにより

$$\begin{aligned} &(\mu - \rho U^2) \left[(\mu - \rho U^2)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left((1-\alpha \cos 2\theta)\kappa - \frac{2}{3}\mu \right) (\mu - \rho U^2) \right. \\ &\quad \left. - \mu \left(\kappa + \frac{1}{3}\mu \right) \sin^2 2\theta \right] = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

を得る。まず $\mu - \rho U^2 = 0$ より

$$U = \sqrt{\mu/\rho} \quad (39)$$

を得る。これは弾性体中のせん断波の速度である。後ろの項より二つの解が求まる。これらは図-1、図-2に示してある。ただし内部摩擦角 ϕ を

$$\alpha = \sin \phi \quad (40)$$

とおいた。これは式(35)が Coulomb 則に一致するように定めたものである(前報¹⁾参照)。また体積圧縮率のかわりに Poisson 比

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \frac{3\kappa - 2\mu}{2(3\kappa + \mu)} \quad (41)$$

を用いてある。また $U_0 = \sqrt{\mu/\rho}$ である。

特に特殊な場合を考察してみる。

1) $\theta = 0, \pi$ 。これは不連続面が最大引張り面であることを意味する。このとき

$$U = \sqrt{\mu/\rho}, \quad U = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\mu + (1-\alpha)\kappa \right) / \rho} \quad (42)$$

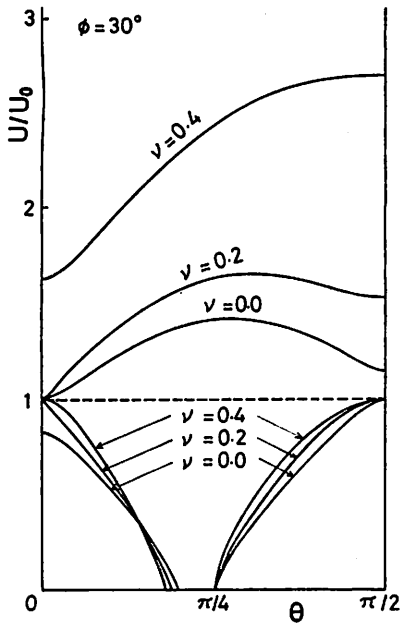


図-1 不連続波面の伝播速度
 $U_0 = \sqrt{\mu/\rho}$, $\phi = 30^\circ$

である。前者の解に対して式 (29) の解 V^i は波面に平行であり、後者に対しては V^i は法線方向である。ゆえに前者がせん断波で後者が圧縮波である。

2) $\theta = \pm\pi/2$ 。不連続面が最大圧縮面である。解は

$$U = \sqrt{\mu/\rho}, \quad U = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\mu + (1+\alpha)\kappa\right)/\rho} \quad (43)$$

である。やはり前者がせん断波、後者が圧縮波である。

3) $\theta = \pm\pi/4$ 。不連続面が最大せん断力面である。解は

$$U = 0, \quad U = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\mu + \kappa\right)/\rho} \quad (44)$$

である。後者は弾性体中の圧縮波の速度に等しい。

4) $U = 0$ 。式 (38) で $U = 0$ とおくと

$$\cos 2\theta = 0, \quad \cos 2\theta = \frac{\alpha\kappa}{\kappa + \mu/3} \quad (45)$$

となる。前者より $\theta = \pm\pi/4$ 、すなわち最大せん断力面である。後者の解を θ^* としよう。これは 図-3 のようになる。非圧縮性の極限 $\kappa/\mu \rightarrow \infty$ ($\nu \rightarrow 0.5$) では

$$\theta^* \rightarrow \pm\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \quad (46)$$

となる。これは完全塑性流動における応力の特性曲面であった (前報¹⁾ 参照)。速度勾配の不連続面で静止できるのはこの二種類に限られる。特に弾性域と塑性域とが隣接していれば、その境界は一般にこのような不連続面であるから、それは最大せん断力面か上記のような角度 θ^* をなす面かのいずれかとなることもこれより分かる。

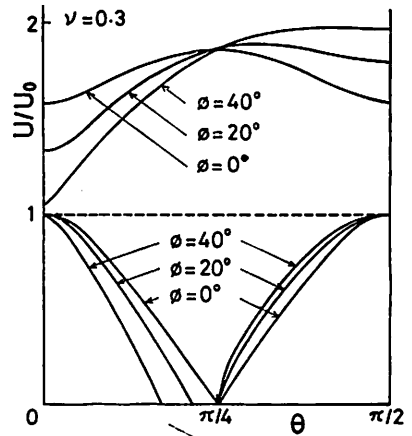


図-2 不連続波面の伝播速度
 $U_0 = \sqrt{\mu/\rho}$, $\nu = 0.3$

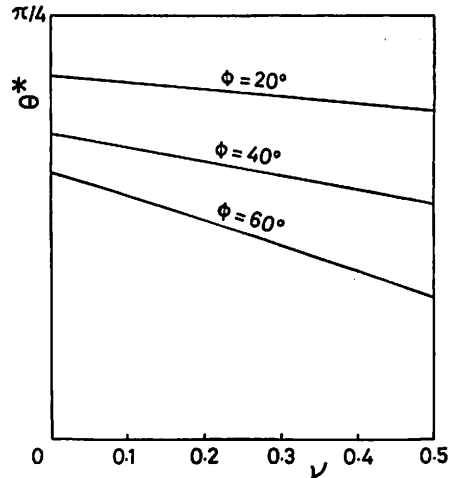


図-3 静止不連続波面の方向

5. 静止応力不連続面

前節では $V^i \neq 0$ である不連続面を考えたが、既に指摘したとおり $U = 0$ では $V^i = 0$ であっても $M, P, \bar{\Sigma}^{ji}$ の不連続を生じる面が存在する可能性がある。そこで $U = 0$ の場合を考える。式 (24) より

$$n_j \bar{\Sigma}^{ji} = n_i P \quad (47)$$

また式 (19) の $f = 0$ を ∂_k で微分した

$$\partial_k f = \frac{1}{2(\alpha p + k)} \bar{\sigma}^{ji} \partial_k \bar{\sigma}^{ji} - \alpha \partial_k p = 0 \quad (48)$$

の不連続をとり

$$\bar{\sigma}^{ji} n_k \bar{\Sigma}^{ji} = 2\alpha(\alpha p + k) n_k \quad (49)$$

となる。これが $k = 1, 2, 3$ で成立することから

$$\bar{\sigma}^{ji} \bar{\Sigma}^{ji} = 2\alpha(\alpha p + k) P \quad (50)$$

となる。ここで平面運動を考えて $\bar{\Sigma}^{xx} = \bar{\Sigma}^{yy} = \bar{\Sigma}^{zz} = 0$ とする。 $\bar{\Sigma}^{yy} = -\bar{\Sigma}^{xx}$ に注意し式 (36) を用いると式 (47)、(50) は

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & -\cos \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta & -\sin \theta \\ \bar{\sigma}^{xx} - \bar{\sigma}^{yy} & 2\bar{\sigma}^{xy} & -2\alpha(\alpha\phi + k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Sigma}^{xx} \\ \bar{\Sigma}^{xy} \\ P \end{pmatrix} = 0$$

となる。 $\bar{\Sigma}^{xx}, \bar{\Sigma}^{xy}, P$ が恒等的に 0 でない条件は行列式が 0 となることであるから

$$(\bar{\sigma}^{xx} - \bar{\sigma}^{yy}) \cos 2\theta + 2\bar{\sigma}^{xy} \sin 2\theta = 2\alpha(\alpha\phi + k) \tag{52}$$

となる。前節のように式 (34), (35) の場合には

$$\cos 2\theta = \alpha, \quad \therefore \theta = \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \tag{53}$$

が得られる。以上より速度勾配が連続でも応力のみの静止した不連続面が生じ得ることが分かった。そして、それは完全塑性流動の応力の特性曲面に一致することも分かった。これと前節の結果とをあわせて、生じ得る不連続面のすべてが明らかになった。注目すべきことは、この理論では弾性成分も考慮しているので静止している弾性域でも極限応力状態があれば本論文で得られた結果がすべて成立するという事実である。本論文では一次の運動不連続適合条件のみを用いたが、二次の運動不連続適合条件を適用すれば、更に不連続の時間変化、すなわち増幅や減衰の様子を調べることもできる。

6. ま と め

粒状体の運動理論として前報¹⁾では完全塑性流動を考え、Levi-Mises 理論の拡張を得たのに対し、本論文では弾性ひずみ速度を考慮して Prandtl-Reuss 理論の拡張を得た。理論構成の本質的部分は前報に示した関連流動則の新解釈である。弾性ひずみ速度に関しては構成式の表現法に関して Euler 微分, Lagrange 微分, Jaumann 微分, Lie 微分等の用い方に注意した。得られた結果に対し、不連続波面の伝播を解析し、波面の可能な方向、その伝播速度、及びそれに与える内部摩擦角や体積圧縮率の影響を明示した。本理論は Kötter の方程式の記述する極限応力状態の理論の自然な拡張であり、静止状態から運動状態への遷移をも記述するものであることが分かる。したがって本理論は弾塑性域が共存する地盤の解析等の理論的基盤を与えるものと思う。

本研究を行うにあたって御指導いただいた東京大学の 大島信徳教授、助言をいただいた埼玉大学の 小田匡寛氏に深く感謝します。

参 考 文 献

- 1) 金谷健一 (1979) : 粒状体の速度場の理論—関連流動則と特性曲面—, 「土質工学会論文報告集」, Vol. 19, No. 4, pp. 103~112.
- 2) Hill, R. (1950) : The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford, Clarendon Press.
- 3) 田中忠次 (1979) : 土質構造物への適用を目的とした一般化弾塑性モデル有限要素解析法, 「農業土木試験場報告」, No. 18, pp. 101~122.

- 4) Sokolnikoff, I. S. (1956) : Mathematical Theory of Elasticity, New York, McGraw-Hill.
- 5) Schouten, J. A. (1951) : Tensor Analysis for Physicists, Oxford, Clarendon Press.
- 6) 山口柏樹 (1967) : 土の塑性力学における応力と速度の不連続性について, 「東工大論文報告集」, pp. 1~9.
- 7) Thomas, T. Y. (1961) : Plastic Flow and Fracture in Solids, New York, Academic Press.
- 8) Hill, R. (1961) : "Discontinuity relations in mechanics of solids", Progress in Solid Mechanics, Vol. 2 (ed. by I. N. Sneddon and R. Hill), Amsterdam, North-Holland Publishing Company, pp. 247-278.
- 9) Truesdell, C. and Toupin, R. (1960) : The Classical Field Theories, Handbuch der Physik III/1, Berlin, Springer-Verlag.
- 10) Truesdell, C. and Noll, W. (1965) : The Non-linear Field Theories of Mechanics, Handbuch der Physik III/3, Berlin, Springer-Verlag.

付 録 A Lie 微分

速度 v^i で運動している場においてベクトル場 w^i が時間的に変化しているとする。このとき w^i が流れ v^i に従って流れるため変化しているのか、あるいは流れに対して相対的に変化しているのかを知りたい場合がある。そのためには流れによる動きを差し引いて時間変化を調べればよい。これが Lie 微分である。反変ベクトルは無限小だけ離れた二点を結んだものと考えてよい (接空間と接ベクトルの定義による)。図-4 のように時刻 t で位置 x^k にあったベクトル w^i が流れによって流されたなら、時刻 $t + \delta t$ には位置 $x^k + v^k(x^k)\delta t$ において

$$\begin{aligned} \bar{w}^i &= w^i + v^i(x^k + v^k)\delta t - v^i(x^k)\delta t \\ &= w^i + w^j \partial_j v^i \delta t \end{aligned} \tag{54}$$

となるはずである。しかし、実際には

$$w^i + \left(\frac{\partial w^i}{\partial t} + v^j \partial_j w^i \right) \delta t \tag{55}$$

となる。ゆえにこれから \bar{w}^i を引いて δt でわったものは

$$\frac{Dw^i}{Dt} = \frac{\partial w^i}{\partial t} + v^j \partial_j w^i - w^j \partial_j v^i \tag{56}$$

となる。これが w^i の Lie 微分である。

式 (54) より分かるように w^i と δt 時間流された

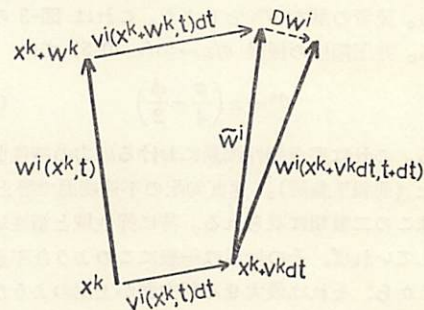


図-4 ベクトル w^i の見かけの変化と真の変化

\tilde{w}^i とは次のような無限小一次変換で結ばれている。

$$w^i = A_j^i \tilde{w}^j, \quad A_j^i \equiv \delta_j^i - \partial_j v^i \delta t \quad (57)$$

一般の量の Lie 微分は次のように定義される。

$$\frac{D\phi}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} [T_A(\phi(x^k + v^k \delta t, t + \delta t)) - \phi(x^k, t)] \quad (58)$$

ただし T_A は A_j^i による変換を表しており、流された影響をとり除くことを意味している。例えば $m_i, T^{jl}, S_{ji}, R_j^i$ をそれぞれ共変ベクトル、二階反変テンソル、二階共変テンソル、一階反変一階共変混合テンソルとすると

$$\left. \begin{aligned} T_A(m_i) &= (A^{-1})_i^j m_j, \\ T_A(T^{jl}) &= A_l^j A_k^i T^{lk}, \\ T_A(S_{ji}) &= (A^{-1})_j^l (A^{-1})_i^k S_{lk}, \\ T_A(R_j^i) &= (A^{-1})_j^l A_k^i R_l^k \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

である。ただし $(A^{-1})_j^i$ は A_j^i の逆行列である。これより

$$\left. \begin{aligned} \frac{Dm_i}{Dt} &= \frac{dm_i}{dt} + m_k \partial_i v^k \\ \frac{DT^{jl}}{Dt} &= \frac{dT^{jl}}{dt} - T^{kl} \partial_k v^j - T^{jk} \partial_k v^l \\ \frac{DS_{ji}}{Dt} &= \frac{dS_{ji}}{dt} + S_{ki} \partial_j v^k + S_{jk} \partial_i v^k \\ \frac{DR_j^i}{Dt} &= \frac{dR_j^i}{dt} + R_k^i \partial_j v^k - R_j^k \partial_k v^i \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

となる。ただし d/dt は Lagrange 微分である。一般には反変指標に対して $-\partial_k v^k$ 、共変指標について $\partial_k v^k$ がそれぞれ対応する。また重さ κ のテンソル密度に対しては T_A によりテンソル変換則を受けた後 $\{\det(A_j^i)\}^{-1}$ 倍される。

$$\det(A_j^i) = 1 - \partial_k v^k \delta t + O(\delta t^2) \quad (61)$$

であるから、Lie 微分はテンソルの法則に従った後、もとの量に $\kappa \partial_k v^k$ をかけたものが加えられる。また接続係数 Γ_{kj}^i に対してはその変換則が

$$T_A(\Gamma_{kj}^i) = (A^{-1})_k^n (A^{-1})_j^m A_l^i \Gamma_{nm}^l + A_l^i \partial_k (A^{-1})_j^l \quad (62)$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{D\Gamma_{kj}^i}{Dt} &= \frac{d\Gamma_{kj}^i}{dt} - \Gamma_{kj}^l \partial_l v^i \\ &\quad + \Gamma_{lj}^i \partial_k v^l + \Gamma_{kl}^i \partial_j v^l + \partial_k \partial_j v^i \\ &= \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial t} + F_k \Gamma_j^i + v^l R_{lkj}^i + F_k (v^l S_{lj}^i) \end{aligned} \quad (63)$$

となる。ただし F_i は Γ_{kj}^i に関する共変微分であり、 S_{kj}^i, R_{lkj}^i は次で定義される振率テンソル及び Riemann-Christoffel の曲率テンソルである。

$$\left. \begin{aligned} S_{kj}^i &= 2\Gamma_{[kj]}^i \\ R_{lkj}^i &= 2\partial_{[l} \Gamma_{k]j}^i + 2\Gamma_{[lm]}^i \Gamma_{kj}^m \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

特に計量基本テンソル g_{ji} を Lie 微分すると

$$\frac{Dg_{ji}}{Dt} = \frac{\partial g_{ji}}{\partial t} + v^k \partial_k g_{ji} + g_{ki} \partial_j v^k + g_{ik} \partial_j v^k \quad (65)$$

である。座標系が直交座標であれば恒等的に g_{ji} は δ_{ji} であるから

$$\frac{Dg_{ji}}{Dt} = 2\partial_{(j} v_{i)} \quad (66)$$

となる。また g_{ji} よりつくられる Christoffel 記号

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ kj \end{matrix} \right\} = g^{il} (\partial_k g_{jl} + \partial_j g_{kl} - \partial_l g_{jk}) \quad (67)$$

に適用すると直交座標では

$$\frac{D \left\{ \begin{matrix} i \\ kj \end{matrix} \right\}}{Dt} = \partial_k \partial_j v^i \quad (68)$$

となる。 g_{ji} や $\left\{ \begin{matrix} i \\ kj \end{matrix} \right\}$ のような恒等的に定数のものを Lie 微分しても 0 でないことに注意しよう。これは Lie 微分が物質とともに一次変換を受ける斜交座標系からみた時間変化であるから、運動が計量や接続をかえようとするように行われていることを意味する。 $(1/2) Dg_{ji}/Dt, D \left\{ \begin{matrix} i \\ kj \end{matrix} \right\} / Dt$ が一次及び二次のひずみ速度の定義である。

特に座標系を始めから直交座標に限定して式 (57) で $\partial_i v^i$ のかわりにその回転成分 $\partial_{[j} v_{i]}$ を用いたものが Jaumann 微分であり、物質とともに回転する直交座標系からみた時間変化を表す。

付録 B 運動不連続適合条件

図-5 のように運動している不連続曲面を考える。まず曲面時間微分 $\delta/\delta t$ を次のように定義する。時刻 t で曲面上の点 x^k での物理量 Z の値を $Z(x^k, t)$ とする。その点での単位法線ベクトル n_i を曲面の進行方向にとり、その速度を U とする。すると点 $x^k + n^k U \delta t$ は時刻 $t + \delta t$ での曲面上の点となる。その点でその時刻での Z の値を $Z(x^k + n^k U \delta t, t + \delta t)$ とするとき

$$\frac{\delta Z}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{Z(x^k + n^k U \delta t, t + \delta t) - Z(x^k, t)}{\delta t} \quad (69)$$

とおく。このとき量 Z に不連続があれば

$$\left[\frac{\delta Z}{\delta t} \right] = \frac{\delta [Z]}{\delta t} \quad (70)$$

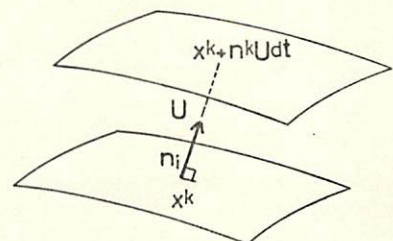


図-5 不連続曲面の運動

が成立する。これを示すには Z の曲面の両側での値を Z^+, Z^- とすれば

$$\begin{aligned} & \{Z^+(x^k+n^kUdt, t+dt) - Z^+(x^k, t)\} \\ & - \{Z^-(x^k+n^kUdt, t+dt) - Z^-(x^k, t)\} \\ & = \{Z^+(x^k+n^kUdt, t+dt) \\ & - Z^-(x^k+n^kUdt, t+dt)\} \\ & - \{Z^+(x^k, t) - Z^-(x^k, t)\} \end{aligned} \quad (71)$$

である。両辺を dt でわり $dt \rightarrow 0$ とすれば式 (70) が得られる。

ところで 図-5 より曲面時間微分 $\delta/\delta t$ は空間微分 ∂_i と時間微分 $\partial_t (= \partial/\partial t)$ とを用いて

$$\delta/\delta t = \partial_i + Un^k \partial_k \quad (72)$$

と表せることが分かる。これと式 (70) とより一次の運動不連続適合条件

$$[\partial_t Z] = -U[\partial_n Z] + \frac{\delta[Z]}{\delta t} \quad (73)$$

を得る。ただし ∂_n は法線方向微分 $n^k \partial_k$ である。この結果と不連続適合条件と、

$$\frac{\delta n_i}{\delta t} = -e_i^\alpha \partial_\alpha U \quad (74)$$

とを用いれば結局、次の二次の運動不連続適合条件を得

る。

$$\begin{aligned} [\partial_t \partial_i Z] &= n_i \left(-U[\partial_n \partial_n Z] + \frac{\delta[\partial_n Z]}{\delta t} \right. \\ & \quad \left. + g^{\beta\alpha} \partial_\beta U \partial_\alpha [Z] \right) + e_i^\alpha \partial_\alpha [\partial_t Z] \\ [\partial_t \partial_t Z] &= U \left(U[\partial_n \partial_n Z] - \frac{\delta[\partial_n Z]}{\delta t} \right. \\ & \quad \left. - g^{\beta\alpha} \partial_\beta U \partial_\alpha [Z] \right) + \frac{\delta[\partial_t Z]}{\delta t} \end{aligned} \quad (75)$$

ただし、 e_i^α はこの曲面上の曲線座標系 $\{x^\alpha\}$ ($\alpha=1, 2$) に関する自然基底 $\{e_\alpha\}$ の相反基底 $\{e^\alpha\}$ の成分であり $g^{\beta\alpha}$ は曲面の第一基本テンソル $g_{\beta\alpha} (= e_\beta \cdot e_\alpha)$ の逆である。 ∂_α は曲線座標系 $\{x^\alpha\}$ に関する面内微分である。式 (73), (74) により Z の不連続は $[Z], [\partial_n Z], [\partial_n \partial_n Z]$ によって表せることが分かる。特に $[Z]=0$ なら式 (73) より

$$[\partial_t Z] = -U[\partial_n Z] \quad (76)$$

また $[Z]=0, [\partial_n Z]=0$ なら

$$\left. \begin{aligned} [\partial_t \partial_t Z] &= -Un_i [\partial_n \partial_n Z] \\ [\partial_t \partial_i Z] &= U^2 [\partial_n \partial_n Z] \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

を得る。

(原稿受付, 1978. 12. 6)