

研究ノート

回転群表現論による異方性の表示方法

(Expression of Anisotropy by Means of the Rotation Group)  
Representation Theory

金 谷 健 一\* (Ken-ichi Kanatani)

キーワード：異方性/応力/土の構成式/ひずみ  
(IGC: D 6)

1. 異方性土の試験方法の表示

近年、土の異方性挙動に関心が集まっているが、異方性という概念には等方性にはない複雑なものを含んでいるので<sup>1),2)</sup>、試験方法ひとつをとっても、等方性の場合と同じようには扱えない。最大の問題点は、応力やひずみの“不変量”を用いて異方性挙動を表すことができないということである。例えば堆積層を考え、鉛直方向に $z$ 軸をとる。これに荷重を加え、その主応力が $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ であるといっただけでは荷重を指定したことにはならない。各主応力に対応する応力主軸が $xyz$ 座標に対してどういう方向を向いているのかが分からないからである。その方向が変われば、同じ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ でも全く異なった挙動を示すという点が異方性たるゆえんである。一方、等方性ではこのような問題は生じない。主応力が $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ であるといえば、その主軸の方向はどちらを向いても試料が等方的だから同じことである。また、その変形の結果を表すにも等方性の場合には主ひずみ $e_1, e_2, e_3$ を表示すればよい。なぜならひずみの主軸は加えた応力の主軸に一致しているはずだからである。しかし、異方性の場合には、主ひずみ $e_1, e_2, e_3$ を表示しただけでは意味がない。そのひずみ主軸が異方性の軸および加えた応力の主軸に対してどちらの方向にあるかを述べなければならない。

以上のことを整理する。通常遭遇する異方性は“直交異方性”が主である。すなわち3つの直交した方向があって、各軸のまわりの $180^\circ$ 回転に対して特性が不変となるものである。その異方性の軸を $xyz$ 座標にとるとする。これに荷重を加えるとき、その主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ とともに、対応する主軸の方向 $r_1, r_2, r_3$ (単位ベクトルとする)を指定しなければならない。また変形の結果を

表示するには主ひずみ $e_1, e_2, e_3$ だけでなく、その対応する主軸方向 $r_1', r_2', r_3'$ (同じく単位ベクトルとする)をも表示しなければならない。また、その試料の構成式も $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ と $e_1, e_2, e_3$ との関係として表すことはできない。 $xyz$ 軸(すなわち異方性の軸)と応力主軸方向 $r_1, r_2, r_3$ 、ひずみ主軸方向 $r_1', r_2', r_3'$ との相対的な位置関係が導入されていなければならないことは明らかであろう。ところが応力主軸を $r_1, r_2, r_3$ という3本のベクトルで表せば、これは9個のパラメータを用いたことになる。これでは $r_1, r_2, r_3$ がいろいろ変化する場合の関係がつかめない。ところが $r_1, r_2, r_3$ は正規直交系であるから、実質的なパラメータは3個でよいはずである。(制約条件は $\|r_1\|=1, \|r_2\|=1, \|r_3\|=1, r_1 \cdot r_2=0, r_2 \cdot r_3=0, r_3 \cdot r_1=0$ の6個ある。)ひずみの主軸についても同様である。

別の見方をしよう。物質内の各点において作用している力の状態は応力テンソル $\sigma=[\sigma_{ij}]$ によって完全に指定される。これは対称テンソルであるから独立な成分は6個である。しかし、その6個を直接用いるかわりに、それらを組み合わせた別の6個を用いても同等である。そのようなもので便利なのは最初の3つを主軸の向きによらない、すなわち“不変量”で表し、残りの3つを主軸の向きにのみよる量で表すものであろう。ひずみテンソル $e$ についても同様である。例えば不変量として主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を用い、残りの3つとして主軸方向 $r_1, r_2, r_3$ を指定する“Euler角” $\theta, \varphi, \psi$ (付録1参照)をとれば、応力を

$$\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \theta, \varphi, \psi\} \quad (1)$$

のように表示できる。同様にひずみについても

$$e = \{e_1, e_2, e_3; \theta', \varphi', \psi'\} \quad (2)$$

と表せる。等方性の場合には $\theta, \varphi, \psi, \theta', \varphi', \psi'$ は考える必要が全くないが、異方性の場合に構成式を考えるときはもちろんのこと、単に試験方法を説明したり結果を表示したりするにもこれらを常に明示しなければ異方性土を扱う意味がない。

ところが上のような Euler 角による表示はあまり便

\* 群馬大学工学部情報工学科 助手 (桐生市天神町 1-5-1)  
(1982. 1. 20 原稿交付・付録期限 1983. 10. 1)

利とはいえない。まず第1に  $r_1, r_2, r_3$  から  $\theta, \varphi, \psi$  を計算するのが複雑である。また  $\theta, \varphi, \psi$  は  $xyz$  軸に対する  $r_1, r_2, r_3$  の相対的位置を示すパラメータであり、 $\theta', \varphi', \psi'$  は  $r_1', r_2', r_3'$  の  $xyz$  軸に対する相対的位置を示すパラメータであるが、これらを知っても、 $r_1, r_2, r_3$  と  $r_1', r_2', r_3'$  との相対的關係を表す Euler 角を求めることが困難である。または同じことであるが、 $r_1, r_2, r_3$  に対して Euler 角  $\theta'', \varphi'', \psi''$  にある方向は  $xyz$  軸に対してどういう方向かがすぐには分からない。すなわち“合成の規則”が簡単な形になっていないためである。そこで、どのようなパラメータが主軸方向を表示するのに便利であるかを考える。望ましい性質としては (1)  $r_1, r_2, r_3$  から簡単に計算でき、またそのパラメータから  $r_1, r_2, r_3$  が簡単に復元できること、(2) 合成の規則が簡単に互いの相対的關係が計算しやすいこと、(3) 更に各パラメータの物理的意味が直観的に理解しやすいこと、等が考えられる。これらのことは結局、“連続群論”において研究されている“回転群の表現”<sup>3-5)</sup>の問題にはかならない。そして、そこで導入されている“Cayley-Klein のパラメータ”、“スピノル”、“Hamilton の四元数”などを用いるのが最も都合がよいと結論できる。これを示すのが本報告の目的である。

## 2. 球面の射影と Cayley-Klein のパラメータ

原点を中心とし、半径1の球面を考える。図-1のように球面上の点  $P(x, y, z)$  と“南極”  $S(0, 0, -1)$  を結ぶ直線が  $xy$ -平面と交わる点を、 $xy$ -平面を複素平面と考えて  $z = u + vi$  とおく。(座標系を表す  $x, y, z$  の  $z$  と同じ記号を用いるが、以下、混乱は生じないであろう。座標系の場合には必ず  $x, y, z$  と組になって現れるか、 $z$  軸、 $z$  成分などと記してある。)このようにして球面上の点が複素平面上の点と一対一対応する。(ただし“南極”  $S$  は“無限遠点”  $\infty$  に対応する。)  $(x, y, z)$  と  $(u, v)$  との対応は次のようになっている。

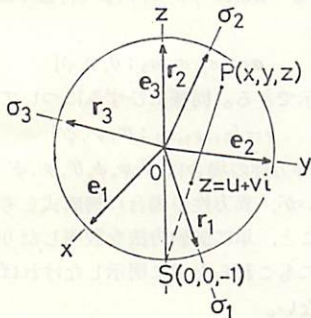


図-1 単位球面の  $xy$  平面への射影と複素数表示

$$u = \frac{x}{1+z}, \quad v = \frac{y}{1+z} \quad (3)$$

$$x = \frac{2u}{1+u^2+v^2}, \quad y = \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \quad z = \frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2} \quad (4)$$

したがって、 $r_1, r_2, r_3$  を指定するには各々の先端の点に対応する複素数  $z_1, z_2, z_3$  を指定すればよい。これは実部、虚部を考えると、 $r_1, r_2, r_3$  を6つのパラメータで表したことになる。しかし、これでもあまり便利とはいえない。

さて、いまこの球面を回転させて、その結果、点  $P$  が点  $P'$  へ移ったとする。対応する複素数を  $z, z'$  とすれば、これは次のような“一次変換”で与えられることが証明できる。

$$z' = \frac{\gamma + \delta z}{\alpha + \beta z} \quad (5)$$

ただし  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  は複素数であり、

$$\begin{cases} \gamma = -\bar{\beta}, & \delta = \bar{\alpha} \end{cases} \quad (6)$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \quad (7)$$

という関係がある。バーは共役複素数を表す。式(6)より式(7)は次のようにも書ける。

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (8)$$

これから分かるように、4つの複素数  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  は式(8)なる関係にある  $\alpha, \beta$  を指定すれば定まる。したがって、実質的なパラメータは3個である。(式(5)は“斉次座標”を用いると、より一般に扱える。付録2参照)

ところで  $r_1, r_2, r_3$  は正規直交系(右手系とする)であるから、座標軸の基底  $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$  に、ある回転をほどこせば  $r_1, r_2, r_3$  になるはずである。そのような、 $e_1, e_2, e_3$  を  $r_1, r_2, r_3$  に重ねる回転のパラメータを  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  とすれば、これは  $r_1, r_2, r_3$  の方向を指定したことになる。これを“Cayley-Klein のパラメータ”とよぶ。(本によって定義が少し異なることもある。)この合成の規制は非常に簡単である。 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  なる回転に引き続いて  $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$  なる回転をほどこした結果がはじめの系からみると  $\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta''$  なる回転であるとすれば、これは次のような行列算で計算できる。

$$\begin{bmatrix} \alpha'' & \beta'' \\ \gamma'' & \delta'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \quad (9)$$

これを証明するのは容易である。式(5)の  $z'$  を

$$z'' = \frac{\gamma' + \delta' z'}{\alpha' + \beta' z'} \quad (10)$$

に代入して整理してみればよい。実はこれは“スピノル空間”における“回転群の表現”になっているのである(付録2参照)。

〔例1〕 図-2のように  $xy$  面で  $e_1, e_2$  を角度  $\theta$  だけ

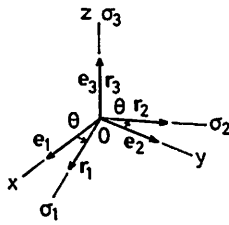


図-2 座標系(異方性の軸)と応力主軸との関係の例

回転したものを  $r_1, r_2$  とすると複素平面上でも角度  $\theta$  の回転が引き起こされるから

$$z' = e^{i\theta} z \quad (11)$$

となる。これから式(6), (7)を考慮して

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \tau & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix} = \cos \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \quad (12)$$

となる。特に  $\theta=0$  のときは単位行列となる。

### 3. Hamilton の四元数による表示

Cayley-Klein のパラメータは  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  なる  $\alpha, \beta$  を指定すればよいのであるが、これらは複素数なので、実部、虚部に分けたほうが扱いやすい。そこで

$$\alpha = q_0 - iq_3, \quad \beta = -q_2 - iq_1 \quad (13)$$

とおく。 $q_0, q_1, q_2, q_3$  は実数であり、 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  より

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad (14)$$

である。 $q_0, q_1, q_2, q_3$ (本によっては  $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ )を“Euler-Olinde-Rodrigues のパラメータ”とよぶ。式(9)に対応する合成の規則は簡単である。まず

$$q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \quad (15)$$

なる“Hamilton の四元数”を考える。合成の規則は単に

$$q'' = q'q \quad (16)$$

である。ただし  $i, j, k$  は積に関して

$$\left. \begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 &= -1 \\ ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j \\ ij = -ji, \quad jk = -kj, \quad ki = -ik \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

に従うものとする。このことは式(9)より直ちに確かめられる(付録3参照)。このことから、 $q$  の“逆数”, すなわち“逆回転”が“共役四元数”

$$\bar{q} = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k \quad (18)$$

で表されることも分かる。例えば、いま応力主軸の方向  $r_1, r_2, r_3$  が異方性の軸  $xyz$  座標に対して、四元数  $q$  で表される方向にあったとする。このとき生じたひずみの主軸方向  $r'_1, r'_2, r'_3$  が  $xyz$  座標に対して四元数  $q'$  で表されているとする。すると、ひずみ主軸方向  $r'_1, r'_2, r'_3$  の応力主軸方向  $r_1, r_2, r_3$  に対して相対的な方向は四元数

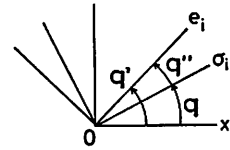


図-3 座標系(異方性の軸)と応力主軸, ひずみ主軸との相対的關係

$$q'' = q' \bar{q} \quad (19)$$

で表される(図-3)。このように主軸の向きを四元数で記述すると合成, 相対関係などが簡単に計算できる。しかも、以下に述べるように計算の方法も単純であり、パラメータの物理的意味も直観的に分かりやすい。したがって異方性の試験法の記述, 結果の整理, 異方性構成式の提案, 等に不可欠と思われる。

【例2】前出の例1の場合は四元数表示では

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + k \sin \frac{\theta}{2} \quad (20)$$

となる。 $\theta=0$  では  $q=1$  となる。

### 4. 四元数表示の計算法

応力(ひずみでも同じことであるが)の主軸方向が  $r_1, r_2, r_3$  のとき、これを表示する四元数の計算法を考える。

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0) \rightarrow r_1 \\ e_2 &= (0, 1, 0) \rightarrow r_2 \\ e_3 &= (0, 0, 1) \rightarrow r_3 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

なる回転は対応する複素平面上では

$$1 \rightarrow z_1, \quad i \rightarrow z_2, \quad 0 \rightarrow z_3 \quad (22)$$

となる。このうちの2つを式(5)に代入すれば  $\alpha, \beta, \tau, \delta$  が求まり、したがって  $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$  が求まる。例えば

$$z \rightarrow w \quad z' \rightarrow w' \quad (23)$$

とすれば

$$w = \frac{\tau + \delta z}{\alpha + \beta z}, \quad w' = \frac{\tau + \delta z'}{\alpha + \beta z'} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} w\alpha + wz\beta - \tau - z\delta &= 0 \\ w'\alpha + w'z'\beta - \tau - z'\delta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

となる。これに  $\alpha = q_0 - iq_3, \beta = -q_2 - iq_1, \tau = q_2 - iq_1, \delta = q_0 + iq_3, z = x + yi, z' = x' + y'i, w = u + vi, w' = u' + v'i$  と実部, 虚部で表したものを代入して整理すれば

$$\begin{bmatrix} u-x & uy+vx & -ux+vy-1 & v+y \\ u-y & -ux+vy+1 & -uy-vx & -v-x \\ u'-x' & u'y'+v'x' & -u'x'+v'y'-1 & v'+y' \\ u'-y' & -u'x'+v'y'+1 & -u'y'-v'x' & -v'-x' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

となる。この係数行列は行列式が0となるはずであるから、このうちの任意の3つの行を取り出して解けば  $q_0 : q_1 : q_2 : q_3$  の比が定まる。そして式(14)から  $q_0, q_1, q_2, q_3$  が定まる。(符号はどちらを選んでも同じ回転を表すことが分かるから、例えば  $q_0 > 0$  となるようにとればよい。) 以上の計算は計算機を用いれば容易にプログラムできる。

逆に  $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$  が与えられたとき主軸方向  $r_1, r_2, r_3$  を知るのも容易である。 $r_1, r_2, r_3$  を列ベクトルとする行列を  $R$  とおけば

$$R = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(-q_0q_3 + q_1q_2) \\ 2(q_0q_3 + q_1q_2) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 \\ 2(-q_0q_2 + q_1q_3) & 2(q_0q_1 + q_2q_3) \\ 2(q_0q_2 + q_1q_3) & 2(-q_0q_1 + q_2q_3) \\ 2(-q_0q_2 + q_1q_3) & 2(q_0q_1 + q_2q_3) \\ q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

となることが分かる(付録4参照)。

[例3] 例1, 2の場合は  $q_0 = \cos(\theta/2)$ ,  $q_1 = q_2 = 0$ ,  $q_3 = \sin(\theta/2)$  であるから、代入してみると

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

となることが分かる。第1列, 2列, 3列がそれぞれ  $r_1, r_2, r_3$  になっていることが確認できる。

## 5. 四元数の物理的意味と回転軸

よく知られているように、3次元的な回転はあるひとつの回転軸のまわりの回転で表すことができる<sup>3,4)</sup>。したがって、座標の基底を  $e_1, e_2, e_3$ 、考えている主軸方向を  $r_1, r_2, r_3$  とすると、ある回転軸方向  $n = (n_1, n_2, n_3)$  (単位ベクトル) があって、そのまわりに右ねじ方向に角度  $\omega$  だけ回転することによって  $e_1, e_2, e_3$  を  $r_1, r_2, r_3$  に重ねることができる。(  $0 \leq \omega \leq \pi$  とする。 ) ゆえに、主軸方向  $r_1, r_2, r_3$  を指定するのに  $n$  と  $\omega$  を指定してもよいことになる。しかし、 $r_1, r_2, r_3$  から  $n, \omega$  を計算すること、あるいはその逆はやや複雑であり、また  $n, \omega$  からは合成の規則が直接的には表せない(付録5参照)。

ところが、主軸方向が四元数  $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$  で表示されていれば、 $n, \omega$  は直ちに求まる。なぜなら

$$\omega = 2 \cos^{-1} q_0, \quad n \propto (q_1, q_2, q_3) \quad (29)$$

となっているからである。すなわち、 $q_1 : q_2 : q_3$  が回転軸方向を表しているのであり、 $q_1, q_2, q_3$  の物理的意味が理解できる。直観的には“ $q_1, q_2, q_3$  はそれぞれ  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸のまわりの回転の大きさを表している”と考えてよいのである。

一方、主軸方向が  $n, \omega$  で与えられているとき、これに対応する四元数表示は上述のことから

$$q = \cos \frac{\omega}{2} + n \sin \frac{\omega}{2} \quad (30)$$

となっている。(ただし  $n$  を四元数  $n_1i + n_2j + n_3k$  とみなしている。) また Euler 角  $\theta, \varphi, \psi$  (付録1) に対応する四元数表示は

$$q = \cos \frac{\theta}{2} \left( \cos \frac{\psi + \varphi}{2} + k \sin \frac{\psi + \varphi}{2} \right) + \sin \frac{\theta}{2} \left( i \sin \frac{\psi - \varphi}{2} + j \cos \frac{\psi - \varphi}{2} \right) \quad (31)$$

となる。このように、他の表示法でも、いったん四元数を媒介すると合成の規則が間接的に得られる。これからも四元数表示が最も基本的な表示法であることが分かる。

[例4] 例1~3の場合は式(20)より直ちに

$$\omega = \theta, \quad n = (0, 0, 1) \quad (32)$$

であることが分かる。

また、実験や数値計算でいろいろな向きの方性のランダムなサンプルを作成したり選んだりする必要がよく生じるが、そのときに必要となる“不変測度”(ランダムな確率分布密度関数)も四元数表示によるものが最も基本的なものである(付録6参照)。したがって、これは異方性土の試験における試料作製、選定、試験方法の記述、試験結果の表示、構成式のモデル化、数値解析の手法等のすべての問題に関連する最も基本となる関係であるといえる。

## 6. ま と め

本報告で新しく提案したのは次の2点である。まず最初に、異方性挙動の表示には応力やひずみの主軸方向の相対的な回転の関係を明示しなければならないことを指摘した点である。これは考えれば当然のことではあるが、これまで特に取り上げられることがなかったのは実験技術の制約により、それほど多くの実験がなされていないためであろう。このため従来はもっぱら特殊な異方性に対する特殊な荷重のみを考えて、個々別々にパラメータを指定していた。例えば平面ひずみの場合はその平面内での異方性の軸と応力やひずみの主軸とのなす角度を用いたり、軸対称な異方性土に軸対称な荷重を加える場合には両者の軸のなす角度を用いる、などであった。しかし、今後はさまざまな種類の異方性土に対してさまざまな荷重による試験が行われるであろう。また解析手法の進歩とともに異方性構成式もいろいろのものが提案されると思われる。したがって、主軸方向を表示するのに統一した表示が望まれるが、本報告で提案する四元数による表示は各主軸方向から簡単に計算でき、また逆に四元数表示から各主軸方向が容易に復元できる。更に、合成の規則が単純で互いの相互関係が計算しやすい、各

パラメータの物理的意味が直観的に理解しやすい、などの利点を備えている。

第2点は回転群表現論そのものに対して新しい応用分野を示したことである。歴史的にみれば回転群表現論は古典力学における剛体運動の方程式を記述することを目的として発展したが<sup>7),8)</sup>、実際の剛体運動を解くには複雑すぎて、次第に数学以外の分野では忘れられ始めた。一方、数学としては抽象空間の幾何学として高次空間への一般化等が追求され<sup>4),5)</sup>、現実の問題との対応はあまり考えられることがなかった。ところが、量子力学が発展して、分子、原子、素粒子などで球対称な対象に対する波動関数やエネルギー固有値の計算に役立つことが発見され、現在では回転群表現論といえば量子力学のためのものであるというふうに思われている<sup>9)</sup>。そこでは、実際の3次元空間内での関係と同じ関係が波動関数の方程式に関しても成立しなければならないという要請から出発しているため、方程式に対する抽象的表現が重要となり、実際の3次元空間の関係を記述するために用いられているのではない。(このため、4節の計算法は特に本報のために提案したものである。)したがって、回転群表現論を異方性の表示に用いるという発想は従来の経過からは考えられることがなかったといってもよいと思われる。また、このことは土質力学に対して新しい強力な武器を提供することであり、土質力学の側から見ても、その進歩、発展に大きく貢献することが期待される。

参 考 文 献

- 1) Kanatani, K. (1981): "Stress-strain relationship of soils as anisotropic bodies under three different principal stresses" (discussion), *Soils and Foundations*, Vol.21, No.1, pp.122-124.
- 2) 金谷健一 (1982): 誘導異方性とその表現, 「土質学会論文報告集」, Vol.22, No.1, pp.136-140.
- 3) 山内恭彦 (1957): 「回転群とその表現」, 岩波書店.
- 4) 山内恭彦・杉浦光夫 (1960): 「連続群論入門」, 培風館.
- 5) ポントリヤギン (柴岡・杉浦・宮崎訳) (1957, 1958): 「連続群論」上, 下, 岩波書店.
- 6) 犬井鉄郎・田辺行人・小野寺嘉彦 (1976): 「応用群論—群表現と物理学」, 裳華房.
- 7) Goldstein, H. (1950): *Classical Mechanics*, New York, Addison-Wesley, pp.94-142.
- 8) Corben, H. C. and Stehle, P. (1960): *Classical Mechanics*, 2nd ed., New York, John Wiley & Sons, pp.373-381.

付録 1. Euler 角

座標基底  $e_1, e_2, e_3$  が与えられたとき、主軸方向  $r_1, r_2, r_3$  を指定する Euler 角  $\theta, \varphi, \psi$  は図-4 のようになる。まず、 $e_3$  と  $r_3$  とのなす角度が  $\theta$  である。 $e_1, e_2$  の張る面と  $r_1, r_2$  の張る面の交線を  $l$  とすると、 $e_2$  と  $l$  とのなす角度が  $\varphi$  である。そして、 $l$  と  $r_1$  のなす角度

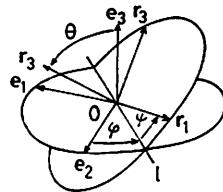


図-4 主軸方向  $r_1, r_2, r_3$  を指定する Euler 角  $\theta, \varphi, \psi$

が  $\psi$  である。これらの角度は図の矢印の方向に正と約束する。

Euler 角  $\theta, \varphi, \psi$  が与えられたとき、 $r_1, r_2, r_3$  は次のようになる。

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \\ -\sin \theta \cos \psi \\ -\cos \theta \cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi & \sin \theta \cos \varphi \\ -\cos \theta \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi & \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \psi & \cos \theta \end{bmatrix} = R_1 R_2 R_3 \quad (33)$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix},$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$R$  の第 1, 2, 3 列がそれぞれ  $r_1, r_2, r_3$  である。 $R$  は  $e_1, e_2, e_3$  を  $r_1, r_2, r_3$  へ重ねるような回転を表す直交行列である。これは  $R_1, R_2, R_3$  と分解できて、 $R_1, R_2, R_3$  はそれぞれ  $e_3$  のまわりの角度  $\psi$  の回転、 $e_2$  のまわりの角度  $\theta$  の回転、 $e_3$  のまわりの角度  $\varphi$  の回転を表す行列である。

一方、 $r_1, r_2, r_3$  が与えられたとき Euler 角  $\theta, \varphi, \psi$  を定めることは符号の多価性により簡単でなく、また合成の規則も簡単な形では表せない。

付録 2. 回転群の表現とスピノル

複素数  $z$  を「斉次座標」 $z = z_1/z_0$  によって二つの複素数  $z_0, z_1$  の組で表すと、 $z_0 = 0$  が  $z = \infty$  に対応して都合がよい。このとき「一次変換」

$$w = \frac{\gamma + \delta z}{\alpha + \beta z} \quad (35)$$

を斉次座標で表せば

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

となることが分かる。複素ベクトル  $(z_0, z_1)$  を「スピノル」とよぶ。Cayley-Klein のパラメータ  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  に関する本文の条件式 (6), (7) は式 (36) のスピノルの変換が「行列式 1 の 2 次元ユニタリ変換群」 $SU(2)$  で

あることを述べている。本文の式 (9) より、スピノル空間の  $SU(2)$  が“回転群”  $SO(3)$  (行列式 1 の 3 次元直交変換群) の“表現”であることが分かる。これは“既約表現”でもある。そして 2:1 の対応を与える。正確に言えば  $SU(2)$  は  $SO(3)$  の“普遍被覆群”である。なぜなら、両者の“基本群”が

$$\pi_1(SO(3)) \cong Z/2, \quad \pi_1(SU(2)) = 0 \quad (37)$$

であるからである。 $SU(2)$  が“単連結”であることは本文の式 (14) のような四元数による表示ができることから明らかである。“3次元球面”  $S^3$  に“同相”だから。

### 付録 3. 四元数で表現できる理由

式 (13) のようにおくと、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} q_0 - iq_3 & -q_2 - iq_1 \\ q_2 - iq_1 & q_0 + iq_3 \end{bmatrix} \\ &= q_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + q_1 \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} + q_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + q_3 \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (38)$$

と表せる。ここで

$$\begin{aligned} I &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ S_3 &= \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (39)$$

とおくと式 (38) は  $q_0 I + q_1 S_1 + q_2 S_2 + q_3 S_3$  と表せる。合成の規則は本文の式 (9) より 2 次元行列の積で与えられるが

$$\left. \begin{aligned} S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = -I \\ S_1 S_2 = S_3, \quad S_2 S_3 = S_1, \quad S_3 S_1 = S_2 \\ S_1 S_2 = -S_2 S_1, \quad S_3 S_2 = -S_2 S_3, \quad S_1 S_3 = -S_3 S_1 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

となっているから、結局、 $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$  なる四元数を考えて、本文の式 (17) の規則に従えばよいのである。なお  $S_1, S_2, S_3$  に  $i$  をかけた  $P_1 = iS_1, P_2 = iS_2, P_3 = iS_3$  はいずれも“エルミート行列”であり、量子力学でよく知られている“Pauli のスピン行列”である。

### 付録 4. 無限小回転と随伴表現

$SU(2)$  の“Lie 代数”は“トレース 0 のエルミート交代行列”である。すなわち  $SU(2)$  の“1 パラメータ群”  $U(t)$  が

$$U(t) = e^{tX}, \quad \text{Tr } X = 0, \quad \bar{X}^T = -X \quad (41)$$

と表される。このような  $X$  が“無限小回転”を表している。実際、 $U(t)$  を回転軸  $n = (n_1, n_2, n_3)$  (単位ベクトル) のまわりの角度  $\omega t$  の回転とすると

$$\frac{dU}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{\omega}{2} \begin{bmatrix} -in_3 & -n_2 - in_1 \\ n_2 - in_1 & in_3 \end{bmatrix} \quad (42)$$

となり、これが角速度  $\omega$  の回転速度を表す。このようなもの全体からなる Lie 代数は 3 次元ベクトル空間である。この上に  $SU(2)$  の引き起こす“随伴表現”すなわち

$$X' = UXU^{-1}, \quad U \in SU(2) \quad (43)$$

なる線形変換  $X \mapsto X'$  を考えると、これは  $SO(3)$  に“同型”である。実際

$$X = \begin{bmatrix} -iz & -y-ix \\ y-ix & iz \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \quad (44)$$

とおくと式 (43) は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -iz' & -y'-ix' \\ y'-ix' & iz' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -iz & -y-ix \\ y-ix & iz \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (45)$$

あるいは両辺に  $i$  をかけて

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} z' & x'-iy' \\ x'+iy' & -z' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (46)$$

となり、 $x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2$  が確かめられる。 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  はこの回転の Cayley-Klein のパラメータにはかならない。

式 (45) を式 (38) の対応によって四元数で書き直すと

$$r' = qr\bar{q} \quad (47)$$

となる。ただし  $r = xi + yj + zk$  とみなしている。 $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$  を代入して具体的に計算すると式 (47) は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(-q_0 q_3 + q_1 q_2) \\ 2(q_0 q_3 + q_1 q_2) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 \\ 2(-q_0 q_2 + q_1 q_3) & 2(q_0 q_1 + q_2 q_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 2(q_0 q_2 + q_1 q_3) \\ 2(-q_0 q_1 + q_2 q_3) \\ q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (48)$$

となる。この変換行列が  $R$  であるから本文の式 (27) が得られるのである。

### 付録 5. 回転軸による表現

ベクトル  $r$  を単位ベクトル  $n$  のまわりに右ねじ方向に角度  $\omega$  だけ回転したものを  $r'$  とすれば図-5 の関係とベクトル公式により

$$r' = (\cos \omega)r + (1 - \cos \omega)nn \cdot r + (\sin \omega)n \times r \quad (49)$$

となる。要素で表せば

$$r'_i = (\cos \omega)r_i + (1 - \cos \omega)n_i n_j r_j + (\sin \omega)\varepsilon_{kjl} n_k n_j \quad (50)$$

となる。ただし添字の総和規約と Eddington のイプシロン  $\varepsilon_{kjl}$  を用いている。ゆえに対応する回転の行列  $R$  は

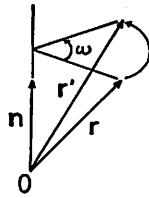


図-5 回転軸と回転角による回転の表示

$$R = [(\cos \omega)\delta_{ij} + (1 - \cos \omega)n_i n_j + (\sin \omega)n_k \epsilon_{kjt}] \quad (51)$$

であり、この第 1, 2, 3 列により主軸方向  $r_1, r_2, r_3$  が表示できる。逆に  $r_1, r_2, r_3$  から  $n$  と  $\omega$  を求めるには、上式で  $\text{Tr } R = 1 + 2 \cos \omega$  に注意すれば

$$\omega = \cos^{-1}(\text{Tr } R - 1)/2 \quad (52)$$

となる。一方、 $Rn = n$ 、すなわち  $n$  は  $R$  の固有値 1 の固有ベクトルである。したがって

$$(I - R)n = 0 \quad (53)$$

より  $n$  の要素の比が定まり、 $\|n\| = 1$  より  $n$  が定まる。しかし、 $n$  の符号と  $\cos^{-1}$  の多価性とは適合するように定めなければならないのが難点である。また  $n, \omega$  による表示では合成の規則が直接的には表せず、いったん、本文の四元数表示式 (30) を用いる必要がある。

### 付録 6. 不変測度

主軸のランダムな分布に関するモンテカルロシミュレ

ーションなどで必要となる不変測度は次の通りである。まず、四元数表示では 3 次元球面  $S^3: q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$  の上の一様分布であることが分かるから、“極座標”

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= \cos \theta_1 \\ q_1 &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ q_2 &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ q_3 &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

で表せば ( $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi, 0 \leq \theta_3 < 2\pi$ ),

$$d\mu = \frac{1}{4\pi^2} \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \quad (55)$$

となる。ただし  $\int d\mu = 1$  と規格化している。回転軸による表示  $n, \omega$  では極座標

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \sin \theta \cos \phi \\ n_2 &= \sin \theta \sin \phi \\ n_3 &= \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

( $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi < 2\pi$ ) により

$$d\mu = \frac{1}{2\pi^2} \sin^2 \frac{\omega}{2} \sin \theta d\omega d\theta d\phi \quad (57)$$

となる。Euler 角  $\theta, \varphi, \psi$  を用いれば ( $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi, \psi < 2\pi$ ),

$$d\mu = \frac{1}{8\pi^2} \sin \theta d\theta d\varphi d\psi \quad (58)$$

となる。