直観的に正しい空間曲線と曲面の表示

金澤 芳之　　金谷 健一

群馬大学工学部情報工学科

376-8515 桐生市天神町 1–5–1 群馬大学工学部情報工学科

Tel: (0277)30-1841 Fax: (0277)30-1844, 1801 yosiyuki@ail.cs.gunma-u.ac.jp, kanatani@cs.gunma-u.ac.jp

ユーザが方程式によって入力した空間曲線を解像度によらず正しい位相 (接続関係) で効率的に表示する。これは区間評価と平均値形式とクラフチック形式を用いた区間解析による臨界点の検出と領域の再帰的分割とを併用することによって実行される。本方法では終結式等の複雑な数式処理が不要であるばかりでなく、曲線が代数方程式で表される必要さえない。これを曲面の輪郭線による描画に応用する。これはワイヤフレームモデルやそのレンダリングに比べ、人間の視覚認識にとって最も自然な表示である。

ユーザインターフェース、空間曲線、臨界点、区間解析、曲面、輪郭線

Displaying Intuitively Correct Space Curves and Surfaces

Yoshiyuki Kanazawa and Kenichi Kanatani

Department of Computer Science
Gunma University, Kiryu, Gunma 376-8515 Japan

Tel: +81(277)30-1841 Fax: +81(277)30-1844, 1801 yosiyuki@ail.cs.gunma-u.ac.jp, kanatani@cs.gunma-u.ac.jp

We present an efficient method for displaying space curves input by the user as equations. The topology (connection) of the curves is correctly displayed in whatever resolution. This is a consequence of detecting all the critical points of the curve and recursively subdividing the domain. Critical points are detected by interval analysis involving interval evaluation, mean-value forms, and Krawczyk forms. Our system does not involve complicated symbolic computation of resolvants or even require the curve to be algebraic. We apply this system to display surfaces by their occluding contours, which is the most natural representation for human visual recognition as compared with wireframe models and their rendering.

user interface, space curve, critical point, interval analysis, surface, occluding contour

1．序論

曲線や曲面を視覚化して表示することはグラフィクスやＣＡＤの基本であるだけでなく、数学教育の教材作成にも欠かすことができない。前報 [9] では座標の関数の零点集合として定義される平面曲線を考えたが、本報では 2 曲面の交線として定義される空間曲線を考える。座標値がパラメータによって陽に表現されている空間曲線は単にパラメータを変化させながら軌跡を表示すればよいが、このように陰に表現されている場合は表示が容易ではない。前報 [9] と同様に、2 曲面は代数曲面に限定せず、三角関数、逆三角関数、指数関数、対数関数なども含めた、いわゆる “式で書ける” 関数 (正式には “初等関数”) で表せる曲面を考える。

グラフィクスやＣＡＤのみならずほとんどの数式解析ソフトでは、曲面の表示はワイヤフレームモデルに適当なレンダリングを施したものが普通である [4]。しかし、これが人間にとって自然な表示とは限らない。幼児が山を描くときはその輪郭のみを描く。人が紙に球を描けといわれれば無意識に円を描き、円錐や円柱を描けといわれれば底面を表す楕円弧と輪郭を表す直線を描くであろう。そして、人間はそのような縁と輪郭のみを見てその曲面の形状を極めて正確に想像できる。

人間およびコンピュータの視覚認識において輪郭に関する多くの研究がなされている [1, 2, 3, 10]。しかし、ワイヤフレームに基づく表示で輪郭を成すのは曲面の真の輪郭ではなく、その近傍のワイヤでしかない。ワイヤフレームを細かくするとワイヤが密集して 3 次元形状の知覚が困難になる。この困難は直接に輪郭を表示することによって解決する。輪郭は空間中では「輪郭母線」とよばれる空間曲線であるから [8]、曲面の表示も曲線の表示に帰着する。これを本論文の空間曲線の表示システムを用いて表示する例を示す。

2．追跡法と分割法

空間曲線を表示する代表的な方法は、曲線上に初期点をとり、そこから曲線の方向を計算してはそれに沿って進むという「追跡法」である [5, 13]。追跡の方法には常微分方程式の数値解法に帰着させる方法や、ニュートン法を繰り返して適用する方法や、それらのいろいろな変形がある。しかし前報 [9] で指摘したように、次の問題が避けられない。

- 初期点を計算する一般的な方法がない。
- 複数の連結成分や孤立点や微小ループがあるとき、すべてが尽くされているかの判定が難しい。
- 曲線の異なる部分が隣接しているとき、追跡が一方から他方へ飛び越すことがある。
- 分岐や交差を生じる特異点で計算が破綻する。

対照的な方法は 3 次元空間を分割し、各領域の境界面と曲線の交点を計算し、これをつないだ線分を生成する「分割法」である。この手法によれば追跡法の困難は解消されるが、次のような欠点がある。

- 分割サイズ (解像度) 以下の位相 (接続関係) が正確には表せない。交差や孤立点や微小ループが見逃されることがある。
- 分割した各部分を正しく接続して全体の表現を作るのが複雑になる。
- 3 次元空間を細かく分割するには多くの計算時間を要する。

第 2 点はＣＡＤのような設計が目的の場合に問題となるが、数学教材のように単に表示が目的な場合は大域的な表現は必要ではない。第 3 点は分割を粗くすれば解決する。最大の障害は第 1 点であるが、本論文では前報 [9] と同様に、臨界点をすべて検出することによって克服可能であることを示す。

表示領域内のすべての臨界点を抽出することは非線形連立方程式のすべての解を検出することに帰着する。前報 [9] で述べたように、これは電子回路の解析に関してよく研究されている。代表的なものは、平均値の定理と縮小写像の不動点定理を組み合わせた区間解析を用い、空間を再帰的に分割しながら調べる「クラフチックの方法」およびその変形である [6, 7, 12, 14, 15, 16]。これらは数百、数千の変数の方程式を対象とするものであるが、空間曲線の表示では 3 変数であり、非常に効率的に実行できる。本論文ではクラフチックの方法によってすべての臨界点を検出し、それらが格子点となるように分割を行い、位相を保つ折れ線表示を求める。曲線に滑らかさを要求するなら必要なだけ分割を細かくすればよい。

3．区間解析による非零判定

二つの方程式

$$F(x,y,z)=0, \qquad G(x,y,z)=0 \tag{1}$$

で定義される空間曲線を考える。前報 [9] でも述べたように、「区間解析」とは関数の各引数のとる範囲を区間として指定したとき、その関数値が取り得る値を含む区間を計算することである [11, 12]。これは実数に $+\infty$, $-\infty$ を付加した数体系を定義すれば常に値が常に定まる。このような区間演算は単項演算や三角関数、逆三角関数、指数関数、対数関数、その他の種々の演算に容易に拡張できる。その結果、変数の型を区間と指定しさえすれば、あたかも実数演算であるかのように計算が実行される。本論文のシステムでは C++ 言語により区間オブジェクトとその演算を定義している。

x, y, z のそれぞれの範囲を区間 I_x, I_y, I_z とするとき、関数 F, G を定義する演算をすべて区間演算に置き換えて得られる区間をそれぞれ $F(I_x,I_y,I_z)$, $G(I_x,I_y,I_z)$ と書くと、$0 \notin F(I_x,I_y,I_z)$ または $0 \notin G(I_x,I_y,I_z)$ なら曲線はこの領域を通過しないことが保証される。これが満たされていないなら領域をさらに細分し、曲線の通過範囲をより限定することができる。

しかし、単に各変数を区間に置き換えて区間評価したのでは範囲が過大評価になることが多い。これを改良する方法としてよく知られているのが導関数の利用である。区間 I の中点を $I_{.m}$ と書き、関数 F, G の「平均値形式」を次のように定義する (実数は幅 0 の区間とみなして区間との演算を定義する)。

$$\begin{aligned} M_F = {} & F(I_{x.m},I_{y.m},I_{z.m})+F_x(I_x,I_y,I_z)(I_x-I_{x.m}) \\ & +F_y(I_x,I_y,I_z)(I_y-I_{y.m}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad +F_z(I_x,I_y,I_z)(I_z-I_{z.m}) \\
M_G &= G(I_{x.m},I_{y.m},I_{z.m})+G_x(I_x,I_y,I_z)(I_x-I_{x.m}) \\
&\quad +G_y(I_x,I_y,I_z)(I_y-I_{y.m}) \\
&\quad +G_z(I_x,I_y,I_z)(I_z-I_{z.m}) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

このとき $0 \notin M_F$ または $0 \notin M_G$ なら曲線はこの領域を通過しないことが保証される。

4. 臨界点の検出

式 (1) で定義される空間曲線の「臨界点」とは次式を満たす点である。

$$
F_yG_z - F_zG_y = 0, \quad F_zG_x - F_xG_z = 0,
$$
$$
F_xG_y - F_yG_x = 0, \quad FG = 0 \qquad (3)
$$

特に $F = G = 0$ となるものが「特異点」であり、$F = 0$, $G = 0$ のそれぞれが定義する 2 曲面の接点となる。これら 2 曲面は共に滑らかであって交線上では曲面としての特異点は持たないとする。また、曲線の臨界点は孤立点であると仮定し、臨界点が連続するような部分はないとする。

まず指定された領域内部の特異点をすべて検出する。これは 3 変数 x, y, z の 4 個の連立方程式の解を求めることに帰着する。上記の 4 式をそれぞれ $A(x,y,z)$, $B(x,y,z)$, $C(x,y,z)$, $D(x,y,z)$ と置く。区間評価および平均値形式による非零判定は各式に個別に適用すればよい。これを領域の再帰的分割と組み合わせれば、解の存在し得ない領域が除外できる。

次に「クラフチック形式」K_x, K_y, K_z を次のように定義する。

$$
\begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{x.m} \\ I_{y.m} \\ I_{z.m} \end{pmatrix} - \boldsymbol{L} \begin{pmatrix} A(I_{x.m},I_{y.m},I_{z.m}) \\ B(I_{x.m},I_{y.m},I_{z.m}) \\ C(I_{x.m},I_{y.m},I_{z.m}) \\ D(I_{x.m},I_{y.m},I_{z.m}) \end{pmatrix}
+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}\mathcal{D}) \begin{pmatrix} I_x - I_{x.m} \\ I_y - I_{y.m} \\ I_z - I_{z.m} \end{pmatrix} \qquad (4)
$$

ただし $\boldsymbol{I}$ は 3×3 単位行列であり、$\mathcal{D}$ は次のように定義した区間勾配行列である。

$$
\mathcal{D} = \begin{pmatrix}
A_x(I_x,I_y,I_z) & A_y(I_x,I_y,I_z) & A_z(I_x,I_y,I_z) \\
B_x(I_x,I_y,I_z) & B_y(I_x,I_y,I_z) & B_z(I_x,I_y,I_z) \\
C_x(I_x,I_y,I_z) & C_y(I_x,I_y,I_z) & C_z(I_x,I_y,I_z) \\
D_x(I_x,I_y,I_z) & D_y(I_x,I_y,I_z) & D_z(I_x,I_y,I_z)
\end{pmatrix} \qquad (5)
$$

$\boldsymbol{L}$ は区間勾配行列の各要素区間の中点からなる行列の (ムーア・ペンローズ) 一般逆行列である。

$$
\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix}
A_x(I_x,I_y,I_z)._m & A_y(I_x,I_y,I_z)._m & A_z(I_x,I_y,I_z)._m \\
B_x(I_x,I_y,I_z)._m & B_y(I_x,I_y,I_z)._m & B_z(I_x,I_y,I_z)._m \\
C_x(I_x,I_y,I_z)._m & C_y(I_x,I_y,I_z)._m & C_z(I_x,I_y,I_z)._m \\
D_x(I_x,I_y,I_z)._m & D_y(I_x,I_y,I_z)._m & D_z(I_x,I_y,I_z)._m
\end{pmatrix}^{-} \qquad (6)
$$

このとき $K_x \cap I_x = \emptyset$ または $K_y \cap I_y = \emptyset$ または $K_z \cap I_z = \emptyset$ なら領域 $I_x \times I_y \times I_z$ 内に解が存在しないことが保証される [12, 14]。

一方、$K_x \subset I_x$ かつ $K_y \subset I_y$ かつ $K_z \subset I_z$ のときは

$$
\|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}\mathcal{D}\|_\infty < 1 \qquad (7)
$$

ならこの領域内に唯一の解が存在し、ニュートン法がその点に収束することが保証される [12, 14]。ただし、区間 I_{ij} を要素とする行列 $\mathcal{I} = (I_{ij})$ の「ニュートンノルム」$\|\mathcal{I}\|_\infty$ を

$$
\|\mathcal{I}\|_\infty = \max_i \sum_j \mathrm{maxabs}(I_{ij}) \qquad (8)
$$

と定義する ($\mathrm{maxabs}(I)$ は区間の端点の絶対値の大きいほうである)。どちらとも判定できない場合は領域をさらに細分して調べる。

解が存在すればその位置はニュートン法で求まるが、3 変数 4 個の方程式のため通常の方法とは異なり、その更新公式に次のように (ムーア・ペンローズ) 一般逆行列を用いる (これは更新量を最小二乗法で定めることと等価である)。

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \\ D_x & D_y & D_z \end{pmatrix}^{-} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} \qquad (9)
$$

5. 空間曲線の表示

本システムでは平面曲線の場合と同様に、ユーザが希望する格子間隔を「解像度」として指定すると格子間隔がそれ以下になるまで領域を各方向に再帰的に 2 分割する。内部に臨界点をもつ格子は臨界点が頂点となるようにさらに分割する。この分割の各ステップにおいて F および G の区間評価および平均値形式による区間解析を行い、曲線が通過し得ないものは除外する。これによって分割が曲線の近傍に限定される。

このようにして定めた曲線の通過し得る各直方体領域に対して、それを囲む 6 個の面上で $F = 0$ かつ $G = 0$ となる点をすべて計算する。これは 2 変数関数の零点の計算であり、各面上で前報 [9] に示したように区間評価、平均値形式、およびクラフチック形式を適用して計算する。そして、得られた点を結んで線分を生成する。このとき特異点以外は他の一点のみと結ばれ、かつどれも交差しないものを候補とし、複数の候補がある場合は特異点と結ぶ線分を優先し、候補線分上で値が 0 に近いかを判定して選択する。そして得られた線分 (を指定した視点から見た像) を描画する。

平面曲線の場合と同様に、あらかじめ臨界点を特異点とそうでないものに分類し、特異点をさらに孤立点と連結点とに分類しておく。それには特異点を中心とし、限界解像度を半径とする球を考え、その表面の球面座標 (θ, ϕ) の 2 変数関数 $F(\theta,\phi)$, $G(\theta,\phi)$ を定義する。そして領域 $[0,\pi] \times [0,2\pi]$ 上で区間評価、平均値形式、およびクラフチック形式を適用し、$F = 0$, $G = 0$ の解が存在するものを連結点、しないものを孤立点と判定する。

孤立点や交差点は特異点であり、これらはすべて検出されるから格子内部にはもはや存在しない。しかし平面曲線の場

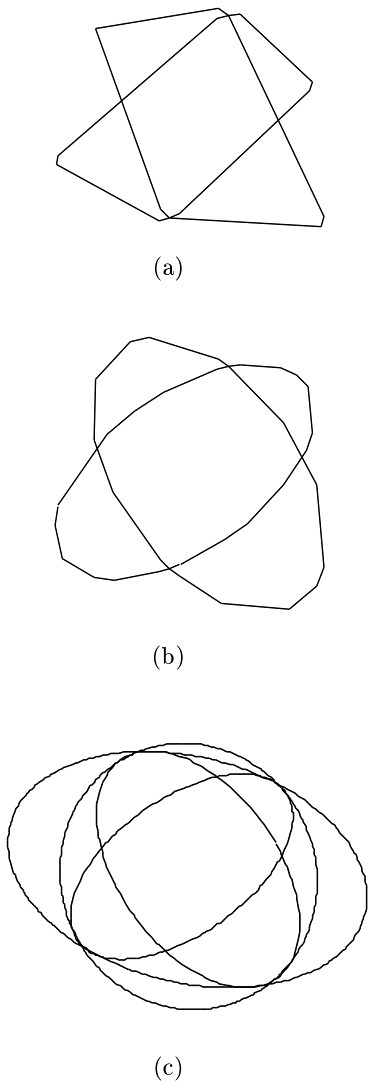


図 1: 二つの楕円体の交線 (特異点が生じる)。 (a) 解像度が 1 辺の 1/2。 (b) 解像度が 1 辺の 1/8。 (c) 解像度が 1 辺の 1/32。

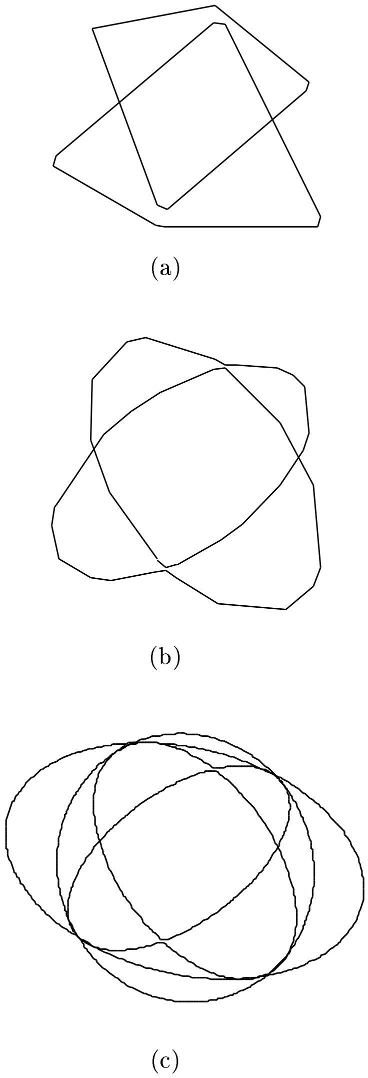


図 2: 二つの楕円体の交線 (特異点が生じない)。 (a) 解像度が 1 辺の 1/2。 (b) 解像度が 1 辺の 1/8。 (c) 解像度が 1 辺の 1/32。

合と異なり、微小ループが格子内部に存在しないことは完全には保証できない。微小ループがあれば通常はその中心の近傍に 2 個の臨界点が存在するので検出されるが、臨界点の位置と格子分割のサイズの関係によっては見逃されることもあり得る。しかし、これを完全に克服するには複雑な処理が必要となり、また適切な分割サイズを選べば解決するので、本システムではこれは課題として残し、これ以上は深入りしないことにする。

二つの楕円体

$$3x^2 + y^2 + 2z^2 = 1, \qquad 3x^2 + 2y^2 + z^2 = \beta \tag{10}$$

は $\beta \neq 1$ のとき二つの環状の交線をもち、$\beta = 1$ のとき特異点が生じて両者が交わる。図 1はこのときの交線を領域 $[-1.2, 1.3] \times [-1.2, 1.3] \times [-1.2, 1.3]$ に解像度を 1 辺の 1/2, 1/8, 1/32 として表示した例である (見やすさのために (c) ではそれぞれの楕円体の輪郭も表示している。方法は後述)。解像度によらず特異点が正しく示されていることがわかる。図 2は比較として $\beta = 1 + 10^{-6}$ の場合の交線を同様に表示したものである。このように曲線が近接しているとき、表示によっては交わっているように見えても生成した線分自体は離れているので、拡大表示すれば離れて見える。また解像度を下げても位相が正しく表示されることがわかる。

図 3, 4は円錐と円柱の交線

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \qquad (x-\beta)^2 + z^2 - 1 = 0 \tag{11}$$

の特異点が生じる場合 ($\beta = 1$) と特異点が生じない場合 ($\beta = 1 + 10^{-6}$) を図 1, 2と同じように表示したものである。解像度を変化しても位相が正しく保たれることがわかる。

図 5は解像度を一辺の $1/N$ とした場合の図 1の交線の表示の計算時間を N に対してプロットしたものであり、ほぼ $O(N)$ であることがわかる (区間解析を用いないと $O(N^3)$ となる)。

6. 曲面の表示

序論で述べたように、曲面の表示は輪郭線によって表示するのが最も自然である。曲面

$$F(x, y, z) = 0 \tag{12}$$

の表示を考える。縁は表示領域の境界の各平面との交線として得られる平面曲線を表示すればよい。輪郭線は次のように表示される。視点$v : (v_1, v_2, v_3)$から見たときに、この曲面上の点$P : (x, y, z)$が輪郭母線上にある必要十分条件は、点 P における接平面が視点 V を含むことであり、次のように書け

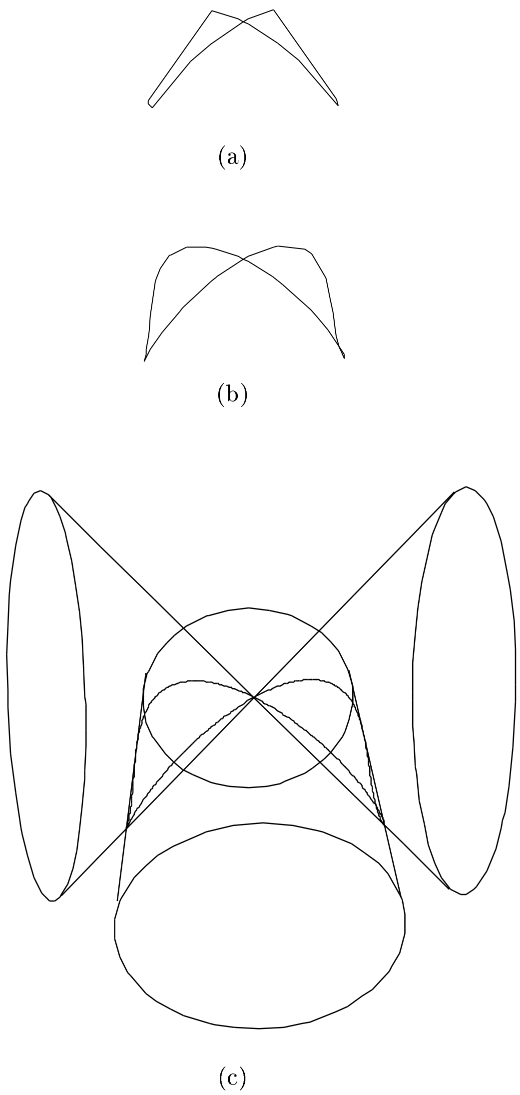


図 3: 円錐と円柱の交線 (特異点が生じる)。(a) 解像度が 1 辺の 1/2。(b) 解像度が 1 辺の 1/8。(c) 解像度が 1 辺の 1/32。

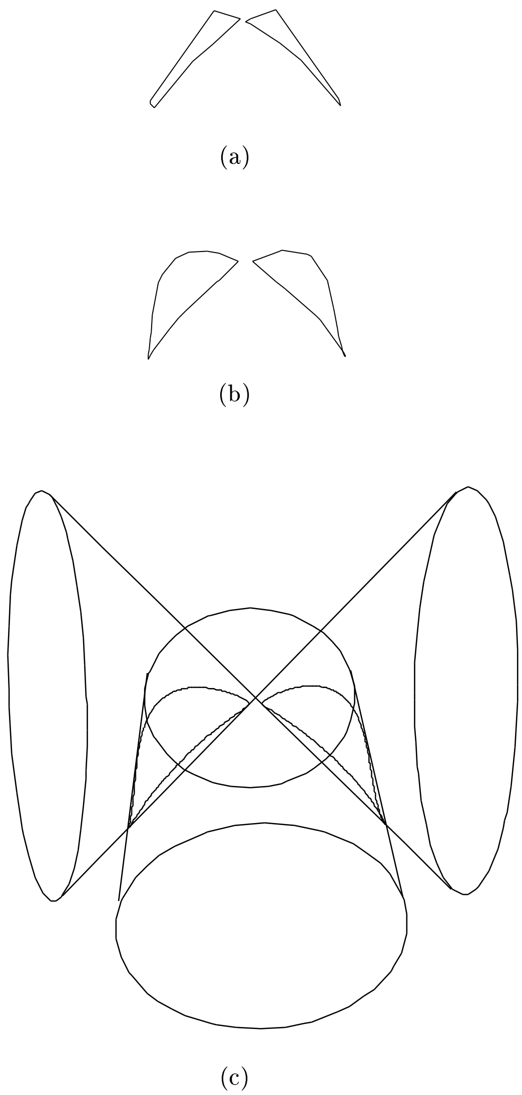


図 4: 円錐と円柱の交線 (特異点が生じない)。(a) 解像度が 1 辺の 1/2。(b) 解像度が 1 辺の 1/8。(c) 解像度が 1 辺の 1/32。

る [8]。

$$F = 0,$$
$$(x - v_1)F_x + (y - v_2)F_y + (z - v_3)F_z = 0 \tag{13}$$

したがって、これら 2 式の表す空間曲線を線分の集合として定義し、視点 v から見た像を表示すればよい。

図 6は曲面

$$\begin{aligned} 23x^4 + x^2y^2 - 37x^2y - 2xy^2 - 15x^2 \\ -2xy + 16y^2 + 16z^2 - x + 16y = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

のワイヤフレーム表示 (x, y, z がそれぞれ一定の平面との交線) および輪郭線表示である。図 7は曲面

$$4y^4 + 3xy^2 - 5y^2 + 4z^2 + 6x^2 - 2xy + 2x + 3y - 1 = 0 \tag{15}$$

を同様に表示したものである。これらは向こう側が透けて見える透明な曲面として描いてある。輪郭線表示によると「くさび」や「くちばし」と呼ばれる輪郭線の特異な形状がよく現れている [8, 10]。曲面を不透明として陰線を除去するには、視点と輪郭母線上の各点を結ぶ線分上で $F = 0$ となる解の存在を調べればよい。これは 1 変数方程式の解の存在を調べることであり、区間解析によって容易に実現できる。

7. まとめ

本論文の目的は、ユーザが方程式によって入力した空間曲線を解像度によらず正しい位相 (接続関係) で効率的に表示することである。まず従来の追跡法の問題点を指摘し、次に区間評価と平均値形式とクラフチック形式を用いた区間解析による臨界点の検出と領域の再帰的分割とを併用する方法を述べた。そして、この方法によれば解像度を変えても位相が正しく保たれることを実験的に確認した。本方法では終結式等の複雑な数式処理が不要であるばかりでなく、曲線が代数方程式で表される必要さえない。例として、これを曲面の輪郭線による描画に応用した。これはワイヤフレームモデルやそのレンダリングに比べ、人間の視覚認識にとって最も自然な表示である。

本論文のシステムでは C++ 言語により区間オブジェクトとその演算を定義している。その結果、変数の型を区間と指定すればあたかも実数演算であるかのように計算が実行される。また数式処理によって導関数の導出を自動化し、それから区間導関数のプログラムを生成している。

謝辞。区間解析についてご教示頂いた中央大学の山村清隆助教授に感謝します。本研究の一部は文部省科学研究費基盤研究 C (2) (No. 09680352) によった。

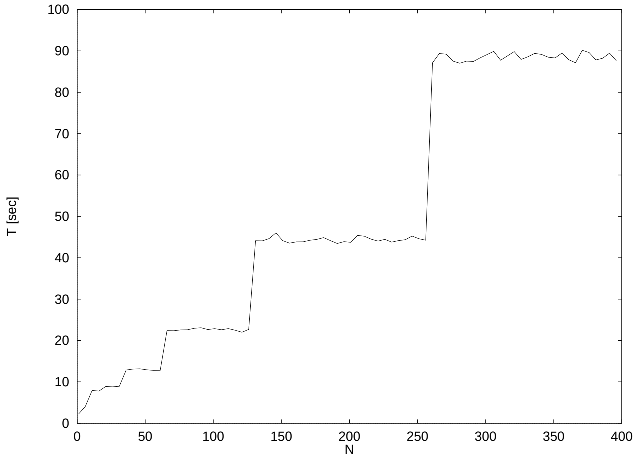


図 5: 解像度が一辺の $1/N$ の表示の計算時間 (単位は秒)。

参考文献

[1] V. I. Arnol'd, *Catastrophe Theory*, Springer, Berlin, 1984; 蟹江幸博 (訳), 「カタストロフ理論」, 現代数学社, 京都, 1985; Third Revised and Expanded Edition, Springer, Berlin, 1992.

[2] J. W. Bruce, Seeing—the mathematical viewpoint, *Math. Intell.*, Vol. 6, No. 4 (1984), pp. 18–25.

[3] R. Cipolla, *Active Visual Inference of Surface Shape*, Springer, Berlin, 1995.

[4] A. Gray, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1993; 小島順 (監訳), 「Mathematica 曲線と曲面の微分幾何」, トッパン, 東京, 1996.

[5] M. Hosaka, *Modeling of Curves and Surfaces in CAD/CAM*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1992; 東正毅, 斉藤剛, 久志本琢也 (訳), 「CAD/CAM における曲線曲面のモデリング」, 東京電機大学出版局, 東京, 1996.

[6] 神沢雄智, 大石進一, 精度保証付き数値計算法を用いた非線形方程式の解曲線の存在検証法, 電子情報通信学会論文誌 A, Vol. J80-A, No. 6 (1997), pp. 907–919.

[7] 神沢雄智, 柏木雅英, 大石進一, パラメータ依存非線形方程式のすべての解を精度保証付きで求めるアルゴリズム, 電子情報通信学会論文誌 A, Vol. J80-A, No. 6 (1997), pp. 920–925.

[8] 金谷健一, 「形状ＣＡＤと図形の数学」, 共立出版, 東京, 1998.

[9] 金澤芳之, 金谷健一, 解像度によらず位相を保つ平面曲線の表示, 情報処理学会研究報告 99-CG-94-7, 1999-2, pp. 37 – 42.

[10] J. J. Koenderink, *Solid Shape*, MIT Press, Cambridge, MA, 1990.

[11] R. E. Moore, *Methods and Applications of Interval Analysis*, SIAM, Philadelphia, 1979.

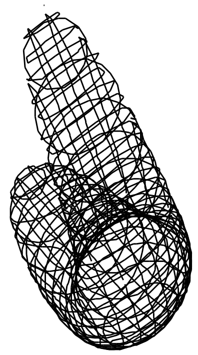
[12] 大石進一, 非線形減少の解析的手法 [I]— 非線形現象の精度保証付き数値解析, 電子情報通信学会誌, Vol. 79, No. 2 (1996), pp. 162–168.

[13] 谷口行信, 杉原厚吉, 検出もれのない代数曲線の追跡法, 情報処理学会論文誌, Vol. 33, No. 10 (1992), pp. 1245–1253.

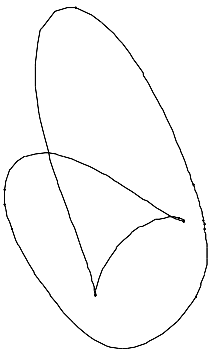
[14] 山村清隆, 非線形現象の解析手法 [V]— 非線形方程式の数値解法 —, 電子情報通信学会誌, Vol. 79, No. 7 (1996), pp. 740–745.

[15] 山村清隆, 徳江愛, 川田仁美, 区間解析を用いた非線形抵抗回路のすべての解を求めるアルゴリズム, 電子情報通信学会論文集 A, Vol. J79-A, No. 10 (1996), pp. 1692–1699.

[16] 山村清隆, 牛田明夫, 堀内和夫, Kevorkian 分割法を用いた区間解析の効率化について, 電子情報通信学会論文集 A, Vol. J74-A, No. 8 (1991), pp. 1142–1150.

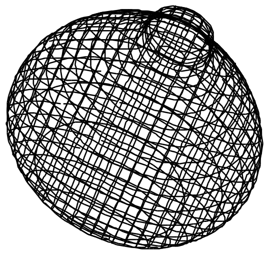


(a)

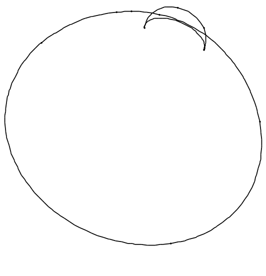


(b)

図 6: (a) 曲面 $23x^4 + x^2y^2 - 37x^2y - 2xy^2 - 15x^2 - 2xy + 16y^2 + 16z^2 - x + 16y = 0$ のワイヤフレーム表示。(b) その輪郭線表示。



(a)



(b)

図 7: (a) 曲面 $4y^4 + 3xy^2 - 5y^2 + 4z^2 + 6x^2 - 2xy + 2x + 3y - 1 = 0$ のワイヤフレーム表示。(b) その輪郭線表示。