

積分 [integral] 実関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で有界なとき, この区間内に分点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ をとり, $\Delta = \max_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})$ とおく. 各区間 $[x_{i-1}, x_i]$ 内に任意に点 ξ_i をとり, 和

$$S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

を考える. $\Delta \rightarrow 0$ となるように $n \rightarrow \infty$ とするとき, 和 S が分点のとり方や ξ_i の選び方によらずに一定値に収束すれば, $f(x)$ は $[a, b]$ においてリーマン積分可能 (あるいは単に積分可能, 可積分) といい, その値を $\int_a^b f(x)dx$ と書き, リーマン積分 (Riemann integral), あるいは単に積分とよぶ. $a > b$ の場合は $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ と約束する.

次のことが知られている.

(1) $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続なとき

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(a + \theta(b - a))$$

となる $0 < \theta < 1$ が存在する (平均値の定理 (mean value theorem)).

(2) 関数列 $\{f_n(x)\}$ が区間 $[a, b]$ で関数 $f(x)$ に一様収束すれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

(3) 級数 $\sum_{i=1}^n f_n(x)$ が区間 $[a, b]$ で関数 $S(x)$ に一様収束し, かつ各 $f_n(x)$ が積分可能であれば

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

(項別積分 (termwise integration))

(\Rightarrow 連続性, 一様収束)

不定積分 [indefinite integral] 一つの端点 a を固定し, 他の端点 x を変数とする実関数 $f(x)$ の積分 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ を $f(x)$ の不定積分という.

$f(x)$ に対して $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数という. $f(x)$ が連続であれば不定積分 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ は $f(x)$ の原始関数の一つであり, 他のすべての原始関数は $F(x) + C$ と表せる. C は定数であり, 積分定数とよぶ. $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数のとき

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) (\equiv [F(x)]_a^b)$$

が成り立つ (微分積分学の基本定理 (fundamental theorem of calculus)).

$f(x), g(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続で, $f(x)$ が連続な導関数 $f'(x)$ をもち, $g(x)$ が原始関数 $G(x)$ をもつとき, 次の式がなりたつ (部分積分 (integration by parts)).

$$\int_a^x f(t)g(t)dt = [f(t)G(t)]_a^x - \int_a^x f'(t)G(t)dt$$

(\Rightarrow 微分, 積分)

特異積分 [improper integral] 実関数 $f(x)$ が積分区間において有界でない場合、あるいは積分区間が有界でない場合に、次のように特異積分 (または広義積分) を定義する。

(1) 区間 $[a, b]$ の上端 b の近傍で有界でない場合、任意の $0 < \varepsilon < b - a$ に対して $f(x)$ が区間 $[a, b - \varepsilon]$ で積分可能であるとすると、このとき

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

が存在すれば、その値を $\int_a^b f(x) dx$ と表す ($\varepsilon \rightarrow +0$ は ε を正の側から 0 に近づけることを表す)。区間 $[a, b]$ の下端 a の近傍で有界でない場合も同様に定義できる。

(2) 区間 $[a, b]$ 内の有限個の点 c_1, c_2, \dots, c_n の近傍で $f(x)$ が有界でない場合は

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \dots + \int_{c_n}^b f(x) dx$$

とする。ただし右辺の各項は (1) で定義した特異積分である。

(3) 区間 $[a, \infty)$ 。任意の $b > a$ について $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で積分可能であるとすると、このとき

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

が存在すれば、その値を $\int_a^\infty f(x) dx$ と表す。 $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ も同様に定義される。

(4) 区間 $(-\infty, \infty)$ についても

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx$$

とする。ただし右辺の各項は (3) で定義した特異積分である (c は任意)。

特異積分が存在する十分条件として次のものが知られている (O はランダウの記号 (\Leftarrow)).

(1) $f(x)$ が区間 $[a, b)$ で連続で $x = b$ の近傍で

$$f(x) = O((b-x)^\alpha), \quad \alpha > -1$$

であれば $\int_a^b f(x)dx$ が存在する.

(2) $f(x)$ が区間 $[a, \infty)$ で連続で, $x \rightarrow \infty$ のとき

$$f(x) = O(x^\alpha), \quad \alpha < -1$$

であれば $\int_a^\infty f(x)dx$ が存在する.

(3) 特異積分 $\int_a^b |f(x)|dx$ (a, b は $\pm\infty$ でもよい) が存在すれば特異積分 $\int_a^b f(x)dx$ も存在し,

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

このとき $f(x)$ は絶対積分可能 (absolutely integrable), あるいは絶対可積分であるという.

(2) の定義によれば $f(x)$ が区間 $[a, b]$ 内の点 c の近傍で有界でないとき, 特異積分 $\int_a^b f(x)dx$ は

$$\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx \right\}$$

と定義される. ただし $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は独立に 0 に近づける. もし $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ として 0 に近づけて収束するなら, その値をコーシーの主値 (Cauchy's principal value) という. また (4) の定義によれば特異積分 $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ は

$$\lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$$

と定義される. ただし a, b は独立に極限をとる. もし $|a| = |b|$ として極限をとって収束するなら, その値をやはりコーシーの主値という.

多重積分 [multiple integral] 長方形領域 $I: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ で実関数 $f(x, y)$ が有界なとき, 区間 $[a, b], [c, d]$ に分点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b, c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$ をとって mn 個の小長方形に分割する. 各小長方形 $x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j$ 中に点 (ξ_{ij}, ζ_{ij}) をとり, 和

$$S = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_{ij}, \zeta_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

を考える. $\Delta = \max_{i,j}(x_i - x_{i-1}, y_j - y_{j-1})$ とおき, $\Delta \rightarrow 0$ となるように $m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ とするとき, 和 S が分点のとり方や点 (ξ_{ij}, ζ_{ij}) の選び方によらず一定値に収束すれば, $f(x, y)$ は領域 I 上で(リーマン)積分可能(あるいは可積分)であるといい, その値を $\int \int_I f(x, y) dx dy$ と書いて(リーマン)二重積分(double integral)とよぶ. 3次元空間の直方体領域やより高次元の場合も同様にして(リーマン)多重積分が定義される.

一般の有界閉領域 D 上で有界な関数 $f(x, y)$ に対して, D を含む長方形領域 I を考え,

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \in I - D \end{cases}$$

のように拡大した関数 $\tilde{f}(x, y)$ が I 上で積分可能のとき, $f(x, y)$ は D 上で積分可能(あるいは可積分)であるといい,

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int \int_I \tilde{f}(x, y) dx dy$$

と定義する. D を積分領域とよぶ. 高次元の場合も同様に定義される.

$f(x, y)$ が D 上で連続なら

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = f(\xi, \zeta)|D|$$

となる点 $(\xi, \zeta) \in D$ が存在する (平均値の定理 (mean value theorem)) . より高次元の場合も同様である .

積分領域 D が連続関数 $\phi_1(x), \phi_2(x)$ によって $a \leq x \leq b$, $\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$ と表され, $f(x, y)$ が連続なら次のように 1 次元の積分の繰返しで計算できる (累次積分 (iterated integral)) .

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

連続な偏導関数をもつ連続関数 $\phi_1(u, v), \phi_2(u, v)$ によって $x = \phi_1(u, v), y = \phi_2(u, v)$ の関係で xy 平面の領域 D が uv 平面の領域 D' に一対一対応しているとき, 次のように変数変換ができる .

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int \int_{D'} \tilde{f}(u, v) |J(u, v)| du dv$$

ただし, $\tilde{f}(u, v) \equiv f(\phi_1(u, v), \phi_2(u, v))$ であり,

$$J(u, v) \equiv \begin{vmatrix} \partial\phi_1/\partial u & \partial\phi_1/\partial v \\ \partial\phi_2/\partial u & \partial\phi_2/\partial v \end{vmatrix}$$

とおいた . J をヤコビアン (Jacobian) とよぶ . 高次元の場合も同様の関係が成立する .

(\Rightarrow 積分)

線積分 [curvilinear integral] $x(t), y(t)$ を $a \leq t \leq b$ 上の連続関数とすると、平面上の集合 $C: (x(t), y(t)), a \leq t \leq b$ を $x(t), y(t)$ の定義する曲線という。 t の増加する方向をその曲線 C の向きという。 $f(x, y)$ を C 上の連続な実関数とする。 区間 $[a, b]$ に分点 $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ をとり、2点 $(x(t_{i-1}), y(t_{i-1})), (x(t_i), y(t_i))$ の間の距離を

$$\Delta s_i = \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$$

とし、 $\Delta = \max_{i=1}^n \Delta s_i$ とおく。 各区間 $[t_{i-1}, t_i]$ に任意に τ_i をとり、和

$$S = \sum_{i=1}^n f(x(\tau_i), y(\tau_i)) \Delta s_i$$

を考える。 $\Delta \rightarrow 0$ となるように $n \rightarrow \infty$ とするとき、 S が分点のとり方や τ_i の選び方によらず一定値に収束すれば、その値を $\int_C f(x, y) dx$ と書き、曲線 C に従う(線素 dx に関する)線積分という。これが存在するときは同じ曲線の別の表し方 $C: (x(t'), y(t')), a' \leq t' \leq b'$ に対しても同一の値となる。特に $f(x, y) = 1$ のとき、 $\int_C ds$ が存在すれば、これが曲線 C の長さにあたる。

線積分 $\int_C f(x, y) ds$ において、曲線 C を積分路といい、 $P(x(a), y(a)), Q(x(b), y(b))$ をそれぞれ始点、終点という。 $\int_C f(x, y) ds$ の定義において Δs_i をそれぞれ $x_i - x_{i-1}, y_i - y_{i-1}$ で置き換えた積分が存在するとき、それらを $\int_C f(x, y) dx, \int_C f(x, y) dy$ と書く。

曲線 C を定義する関数 $x(t), y(t)$ が $a \leq t \leq b$ で連続な導関数をもつとき、曲線 C は滑らかであるという。曲線 C が滑らかで $f(x, y)$ が C 上で連続であれば線積分 $\int_C f(x, y) ds, \int_C f(x, y) dx, \int_C f(x, y) dy$ が存在し、次の関係式がなりたつ。

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

$$\int_C f(x, y) dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) x'(t) dt$$

$$\int_C f(x, y) dy = \int_a^b f(x(t), y(t)) y'(t) dt$$

$f(x, y), g(x, y)$ が領域 D で連続な偏導関数をもつとき次の関係式がなりたつ (グリーン の 定理 (Green's theorem)) .

$$\iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy = \int_C f(x, y) dy - \int_C g(x, y) dx$$

ただし C は領域 D の境界であり, D を正の向きに囲むように (進行方向に対して左側が内部となるように) 向きをつける .

(\Rightarrow 多重積分)

面積分 [surface integral] uv 平面のある領域 D 上で定義された連続関数 $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ によって表される空間の集合 $S: (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ を $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ の定義する曲面という. $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ が D 上で連続な偏導関数をもつとき, 曲面 S は滑らかであるという. このとき積分領域を D とする二重積分

$$|S| = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2} du dv$$

がこの曲面の面積にあたる. ただし

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \equiv \begin{vmatrix} \partial x / \partial u & \partial x / \partial v \\ \partial y / \partial u & \partial y / \partial v \end{vmatrix}$$

と定義する (ヤコビアン).

uv 平面の領域 D を n 個の小領域 D_i に分割し, 対応する小曲面 S_i の面積を $|S_i|$ とする. 各小曲面 S_i 上の最も離れた 2 点間の距離 (直径) を Δ_i とし, $\Delta = \max_{i=1}^n \Delta_i$ とする. 各小曲面 S_i 上に点 (x_i, y_i, z_i) をとり, S 上で定義された関数 $f(x, y, z)$ に対し, 和

$$\sum_{i=1}^n F(x_i, y_i, z_i) |S_i|$$

を考える. $\Delta \rightarrow 0$ となるように $n \rightarrow \infty$ としたとき, これが分割の仕方や (x_i, y_i, z_i) の選び方によらずに一定値に収束すれば, その値を $\iint_S f(x, y, z) dS$ と書いて, 曲面 S 上の (面素 dS に関する) 面積分とよぶ. これが存在すれば同じ曲面 S の別の表し方 $S: (x(u', v'), y(u', v'), z(u', v')), (u', v') \in D$ に対しても同じ値となる.

$\int \int_S f(x, y, z) dS$ の定義において $|S_i|$ をそれぞれ

$$\int \int_{D_i} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} du dv, \quad \int \int_{D_i} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} du dv, \\ \int \int_{D_i} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv$$

でおき換えた積分が存在するとき, その値を $\int \int_S f(x, y, z) dy dz$, $\int \int_S f(x, y, z) dz dx$, $\int \int_S f(x, y, z) dx dy$ と書く.

S が滑らかで $f(x, y, z)$ が S 上で連続であれば面積分が存在して, 次の関係式が成り立つ.

$$\int \int_S f(x, y, z) dS \\ = \int \int_D \tilde{f}(u, v) \sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2} du dv \\ \int \int_S f(x, y, z) dy dz = \int \int_D \tilde{f}(u, v) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} du dv \\ \int \int_S f(x, y, z) dz dx = \int \int_D \tilde{f}(u, v) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} du dv \\ \int \int_S f(x, y, z) dx dy = \int \int_D \tilde{f}(u, v) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv$$

ただし $\tilde{f}(u, v) = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ である.

$f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$, $h(x, y, z)$ が空間内の有界な閉領域 V で連続な偏導関数を持ち, 境界面 S が滑らかなとき, 次の関係式が成り立つ (ガウスの発散公式 (Gauss' divergence formula)).

$$\int \int \int_V \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dx dy dz \\ = \int \int_S f(x, y, z) dy dz + \int \int_S g(x, y, z) dz dy + \int \int_S h(x, y, z) dx dy \\ (\Rightarrow \text{多重積分})$$

スチルチェス積分 [Stieltjes integral] 実関数 $f(x)$, $\varphi(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で有界のとき, 分点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ をとり, $\Delta = \max_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})$ とおく. 各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ 内に任意に点 ξ_i をとり, 和

$$S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}))$$

を考える. $\Delta \rightarrow 0$ となるように $n \rightarrow \infty$ とするとき, 和 S が分点のとり方や ξ_i の選び方によらずに一定値に収束すれば, その値を $\int_a^b f(x)d\varphi(x)$ をと書き, リーマン・スチルチェス積分 (Riemann-Stieltjes integral), あるいは単にスチルチェス積分とよぶ. $\varphi(x) = x$ とした場合が通常の (リーマン) 積分である. $a > b$ に対して $\int_a^b f(x)d\varphi(x)$ を $-\int_b^a f(x)d\varphi(x)$ と定義する.

区間 $[a, b]$ の分点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ に対して

$$\sum_{i=1}^n |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})| \leq M$$

となる分割によらない一定の M がとれるとき, $\varphi(x)$ は $[a, b]$ で有界変動 (bounded variation) であるという. 区間 $[a, b]$ で $f(x)$ が有界変動であれば $\int_a^b f(x)d\varphi(x)$ が存在する. さらに $\int_a^b \varphi(x)df(x)$ も存在し,

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x) = [f(x)\varphi(x)]_a^b - \int_a^b \varphi(x)df(x)$$

(部分積分 (integration by parts)). ただし $[F(x)]_a^b$ は $F(b) - F(a)$ を表す.

$\varphi(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続な導関数をもつとき

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x) = \int_a^b f(x)\varphi'(x)dx$$

また, $y = \varphi(x)$ が区間 $[a, b]$ で狭義単調増加 ($x_1 < x_2$ なら $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$) であれば, その逆関数を $x = \varphi^{-1}(y)$ とするとき

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi^{-1}(y)) dy$$

(\Rightarrow 積分)

ルベーク積分 [Lebesgue integral] $f(x)$ が $(-\infty, \infty)$ で正または 0 の有界な関数とし, M を任意の上界 (すなわち $0 \leq f(x) < M$) とする. 区間 $[0, M]$ に分点 $0 = f_0 < f_1 < \dots < f_n = M$ をとり, $E_i = \{x \mid f_{i-1} \leq f(x) < f_i\}$ とする. 集合 $E_i \subset (-\infty, \infty)$ の長さを表す量 (有限個あるいは加算個の点なら 0, 区間なら区間長, 区間の和集合なら各区間長の総和, 等) を $\mu(E_i)$ とおき, 集合 E_i の測度 (measure) とよぶ. このとき和

$$S = \sum_{i=1}^n f_i \mu(E_i)$$

を考える. $\Delta = \max_{i=1}^n (f_i - f_{i-1})$ とおき, $\Delta \rightarrow 0$ となるように $n \rightarrow \infty$ とするとき, 和 S は分点のとり方によらずに一定値に収束する (∞ も含める). これを $\int f(x) dx$ (あるいは $\int f(x) d\mu(x)$) と書いてルベーク積分 (Lebesgue integral) とよぶ.

$f(x)$ が有界でない場合は $M \rightarrow \infty$ の極限值と定義する (∞ かかもしれない). $f(x)$ が負の値もとる場合は

$$f^+(x) = \max(f(x), 0), \quad f^-(x) = \min(f(x), 0)$$

とおくと, $f(x) = f^+(x) + f^-(x)$ であり, $f^+(x), -f^-(x)$ は非負の関数であるから

$$\int f(x) dx = \int f^+(x) dx + \int (-f^-(x)) dx$$

と定義する. ただし $\infty + \text{実数} = \infty$, 実数 $-\infty = -\infty$, $\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$ と約束し, $\infty - \infty$ は定義されない. $\int f(x) dx$ が有限の値をとるとき $f(x)$ はルベーク可積分 (Lebesgue integrable) であるという.

$f(x)$ がリーマン可積分であれば, (特異積分の特殊なものを除いて) ルベーク可積分でもあり, 両者の積分は一致

する．しかしリーマン可積分でなくてもルベーク可積分のものは多く，積分をルベーク積分とみなせば，各種の極限の存在が保証されたり，極限操作を交換できるなど，理論的扱いが容易になる．

関数 $f(x)$, $g(x)$ のとる値が異なる点の集合 $\{x|f(x) \neq g(x)\}$ の測度が 0 のとき， $f(x)$ と $g(x)$ はほとんど至るところ (almost evrywhere) 等しいという．ほとんど至るところ等しい関数のルベーク積分は等しい．またルベーク積分が $\int |f(x)|dx = 0$ であれば $f(x)$ はほとんど至るところ 0 に等しい．

ルベーク積分の基本的性質としては，リーマン積分で成立する性質のほかに次のようなものがある．

ルベーク単調収束定理 (Lebesgue's monotone convergence theorem) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$ であり， $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ がほとんど至るところ存在すれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x)dx = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)dx$$

ルベークの(有界収束)定理 (Lebesgue's (dominated convergence) theorem) $\lim f_n(x)$ がほとんど至るところ存在し， $|f_n| \leq h(x)$ なるルベーク可積分な関数 $h(x)$ が存在すれば $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ もルベーク可積分で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x)dx = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)dx$$

項別積分定理 (termwise integration theorem) (i) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ がほとんど至るところ収束し， $|\sum_{k=1}^n f_k(x)| \leq h(x)$, $n = 1, 2, \dots$ なるルベーク可積分な関数 $h(x)$ が存在する，または (ii) 各 k について $f_k(x)$ はルベーク可積分かつ $f_k(x) \geq 0$ ，または (iii) 各 k について $f_k(x)$ はルベーク可積

分かち $\sum_{k=1}^{\infty} \int |f_k(x)| dx < \infty$ であれば

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k(x) dx$$

n 次元空間の場合も測度が定義されれば同様にしてルベーク積分が定義される．特に2次元の場合，測度を適切に定義すれば次の式が成立する（フビニの定理 (Fubini's theorem)）．

$$\int f(x, y) dx dy = \int \left(\int f(x, y) dx \right) dy = \int \left(\int f(x, y) dy \right) dx$$

しかし測度を厳密に定義することは単純ではない．空間 X の部分集合に対して $[0, \infty)$ の値をとる集合関数 μ が次の (i), (ii) を満たすとき，これを X 上の測度という．(i) 空集合 \emptyset に対して $\mu(E) \geq 0$ ．(ii) $E_1, E_2, \dots \subset X$ が互いに交わらないとき $\mu(\cup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$ ．ところが，このような測度をすべての部分集合に対して矛盾なく定義することは一般にはできない．そこで次の (a)~(d) を満たす部分集合の族 \mathcal{E} (これを完全加法族または σ 加法族という) を固定し，これに属する部分集合のみに測度を定義する．(a) $\phi, X \in \mathcal{E}$ ．(b) $E \in \mathcal{E}$ なら $\bar{E} \in \mathcal{E}$ ($\bar{E} = X - E$ は補集合)．(c) $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ なら $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{E}$ ．(d) $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{E}$ なら $\cup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{E}$ ．このとき空間 X (あるいは (X, \mathcal{E}, μ) と書く) を測度空間という．

測度の定義される集合を可測集合 (measurable set) という．測度空間 X 上の実関数 f は任意の $f_1 < f_2$ に対して $E = \{x \in X | f_1 \leq f(x) \leq f_2\}$ が可測集合のとき，可測関数 (measurable function) という．ルベーク積分は可測関数に対して定義される． X が n 次元ユークリッド空間の場合はルベーク測度 (Lebesgue measure) とよぶ測度を定義して測度空間とすることができる．

(\Rightarrow 積分)

等角写像 [conformal mapping] 複素 z 平面のある領域を複素 w 平面のある領域に一対一に対応させる関数 $w = f(z)$ で、交わる曲線を写像したときその交角が (向きを含めて) 常に保たれるものをその領域における等角写像という。ただし曲線の交角は交点での接線のなす角と定義する。このとき $f(z)$ はその領域で正則関数 (\Leftarrow 解析関数) になる (すなわち複素微分 $f'(z)$ が存在する)。逆に任意の正則関数 (解析関数) は正則 (解析的) で、 $f'(z) \neq 0$ なる領域で等角写像を定める (\Rightarrow 複素関数, 複素関数の微分)。

平面上のある領域で定義された偏微分方程式の数値解法の一つとして平面を網目に分割し、微分方程式を差分方程式におき換えて解く方法 (差分近似解法 (difference method)) がある。このとき網目が直交曲線座標系となっていると、差分近似の処理が簡単になる。またその微分方程式の定義される領域の境界が座標曲線に一致していると境界条件の処理が容易になる。そのような直交曲線座標系を生成するのに等角写像がよく利用される。それは、一つの直交曲線座標系 (直交座標系, 極座標系など) に対して任意の等角写像 $f(z)$ を施したのも、やはり直交曲線座標系になっているからである。

特に流体力学や電磁気学でよく現れるポテンシャル問題 (potential problem), すなわち与えられた境界条件を満たす調和関数 (harmonic function, ラプラスの方程式 $\Delta\phi = 0$, $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ の解) を求める問題であれば、調和関数 $\phi(x, y)$ を任意の等角写像 $w = f(z)$ で写像した関数 $\phi(u, v)$ ($z = x + iy$, $w = u + iv$) も調和関数であり、特に任意の正則関数 $f(z)$ の実部, 虚部も調和関数であることから、適当な等角写像を求めることにより解が直ちに得られる。

基本的な性質として、全複素平面 (無限遠点を含める) を全複素平面へ一対一に写像する等角写像は 1 次 (分数) 変換

(linear (fractional) transformation)

$$z = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

しかなくことが知られている。この変換全体は群をなし(1次(分数)変換群), 円を円に写像する(円円対応)。ただし直線も半径無限大の円とみなす。

任意の境界とその内部からなる(全平面でない)単連結(すなわち穴のない一つの)領域は, 内部が原点中心の単位円の内部に, 境界が境界に対応する一対一の等角写像が存在する(リーマンの写像定理 (Riemann's mapping theorem))。この結果として, 任意の二つの(全平面でない)単連結領域は互いに一対一に等角写像できる。円, 半平面, 帯状領域などの単純な領域では, そのような等角写像は簡単な初等関数によって構成できる。しかし, 一般的な領域に対してそのような等角写像を構成するのは容易ではない。実際には, まず近似的なものを求め, 近似を改良する反復を行う。

特別の場合として領域が多角形するとき, 次の結果が知られている。等角写像 $w = f(x)$ として

$$\frac{dw}{dz} = (z - \alpha_1)^{\phi_1 - 1} (z - \alpha_2)^{\phi_2 - 1} \cdots (z - \alpha_n)^{\phi_n - 1}$$

の解を選べば, 上半平面 ($\text{Im } z \geq 0$) が多角形の内部に写像され, 実軸が多角形の周りに写り, 実軸上の点 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ が頂点に対応し, 各頂点における多角形の内角がそれぞれ $\phi_1\pi, \phi_2\pi, \dots, \phi_n\pi$ となっている。これをシュワルツ・クリストフェル変換 (transformation formula of Schwarz-Christoffel) という。

ベクトル場 [vector field] xyz 直交座標をもつ3次元空間(あるいはその一部)の各点 (x, y, z) にスカラ $f(x, y, z)$, ベクトル $\mathbf{V} = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$ が与えられているとき, それぞれスカラ場 (scalar field), ベクトル場という.

スカラ場 f に対して $\text{grad} f = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)$ をその勾配 (gradient) という. その向きは f の値が最も急に増える方向を, その大きさはその方向への f の増加率を表す.

ベクトル場 \mathbf{V} に対して $\text{div} \mathbf{V} = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z$ をその発散 (divergence) という. \mathbf{V} を流体の速度場とみなすと, 各点での流体のわき出し率を表す.

ベクトル場 \mathbf{V} に対して $\text{rot} \mathbf{V} = (\partial w/\partial y - \partial v/\partial z, \partial u/\partial z - \partial w/\partial x, \partial v/\partial x - \partial u/\partial y)$ をその回転 (rotation) という ($\text{curl} \mathbf{V}$ とも書く). \mathbf{V} を流体も速度場とみなすと, その向きはその回りの(右ねじ方向の)流体の循環が最大となる方向を, その大きさはその(単位面積を囲む)循環の量を表す.

スカラ場 f , ベクトル場 \mathbf{V} にラプラス演算子 (Laplacian) $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ を適用した $\Delta f = \partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2 + \partial^2 f/\partial z^2$, $\Delta \mathbf{V} = (\Delta u, \Delta v, \Delta w)$ もそれぞれスカラ場, ベクトル場である. 形式的に $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ とおいて, これをナブラ (nabla) またはハミルトン演算子 (Hamiltonian) とよぶ. $\text{grad} f, \text{div} \mathbf{V}, \text{rot} \mathbf{V}, \Delta f, \Delta \mathbf{V}$ をそれぞれ $\nabla f, \nabla \cdot \mathbf{V}, \nabla \times \mathbf{V}, \nabla^2 f, \nabla^2 \mathbf{V}$ と書くこともある.

次の関係がなりたつ.

$$\text{div}(\text{rot} \mathbf{V}) = 0$$

$$\text{rot}(\text{grad} f) = 0$$

$$\Delta \mathbf{V} = \text{grad}(\text{div} \mathbf{V}) - \text{rot}(\text{rot} \mathbf{V})$$

$\text{div} \mathbf{V} = 0$ なるベクトル場 \mathbf{V} をわき出しなし (または管状 (solenoidal)), $\text{rot} \mathbf{V} = 0$ なるベクトル場 \mathbf{V} をうずなし

(または層状 (lamellar)) であるという。単連結領域で、わき出しなしのベクトル場 V はあるスカラー場 ϕ (スカラーポテンシャル (scalar potential)) があって $V = \text{grad}\phi$ と、また、うずなしのベクトル場 V はあるベクトル場 A (ベクトルポテンシャル (vector potential)) があって $V = \text{rot}A$ と表せる。一般のベクトル場 V は両者の重ね合せとして $V = \text{grad}\phi + \text{rot}A$ と表せる (ヘルムホルツの定理 (Helmholtz theorem))。

$\Delta f = 0, \Delta V = 0$ となるスカラー場 f , ベクトル場 V は調和 (harmonic) であるという。わき出しなし ($\text{div}V = 0$) かつうずなし ($\text{rot}V = 0$) のベクトル場 V は調和 ($\Delta V = 0$) である。このとき、ある調和スカラー場 ϕ ($\Delta\phi = 0$) が単連結領域で存在して $V = \text{grad}\phi$ と表せる。

スカラー場 f, g , ベクトル場 U, V に対して次の関係式がなりたつ。

$$\text{grad}(fg) = g \text{grad}f + f \text{grad}g$$

$$\text{div}(fV) = (\text{grad}f) \cdot V + f \text{div}V$$

$$\text{rot}(fV) = (\text{grad}f) \times V + f \text{rot}V$$

$$\text{div}(U \times V) = V \cdot \text{rot}U - U \cdot \text{rot}V$$

$$\text{rot}(U \times V) = (V \cdot \nabla)U - (U \cdot \nabla)V + (\text{div}V)U - (\text{div}U)V$$

$$\text{grad}(U \cdot V) = (U \cdot \nabla)V + (V \cdot \nabla)U + U \times \text{rot}V + V \times \text{rot}U$$

ただし $V = (u, v, w)$ に対して $(V \cdot \nabla)U$ は微分演算子 $u\partial/\partial x + v\partial/\partial y + w\partial/\partial z$ を U の各成分に施すことを表す。
(\Rightarrow ベクトルの積分)

ベクトルの積分 [integrals of vectors] C を 3 次元空間の閉曲線, V をベクトル場とするとき, 線積分 ($\Leftrightarrow \int_C V \cdot t ds$ ($\int_C V \cdot ds$ とも書く)) を C に沿う循環 (circulation) という. ただし s は C の弧長を表すパラメータであり, t は各点で s の増加する方向の単位接線ベクトルである.

S を滑らかな曲面とし, V をベクトル場とするとき, 面積分 ($\Leftrightarrow \int_S V \cdot n dS$ ($\int_S V \cdot dS$ とも書く)) を S を通過する流束 (flux) という. ただし n は S の各点での単位法線ベクトルである.

V を空間の滑らかな境界をもつ領域とし, S をその境界閉曲面とすると, 次のガウスの発散定理 (Gauss divergence theorem) がなりたつ.

$$\int_V \operatorname{div} V dV = \int_S V \cdot n dS$$

ただし, 単位法線ベクトル n は外向きにとる (\Rightarrow 多重積分).

S を空間の滑らかな境界をもつ曲面とし, C をその境界閉曲線とすると, 次のストークスの定理 (Stokes theorem) がなりたつ.

$$\int_S (\operatorname{rot} V) \cdot n dS = \int_C V \cdot t ds$$

ただし, 単位接線ベクトル t はその点の近傍で単位法線ベクトル n の回りを右ねじ方向に回るようにとる.

以上の関係より, $|V|$ を領域 V の体積, $|S|$ を曲面 S の面積とするとき, 次の関係がなりたつ.

$$\operatorname{div} V = \lim_{|V| \rightarrow 0} \frac{1}{|V|} \int_S V \cdot n dS$$

$$n \cdot \operatorname{rot} V = \lim_{|S| \rightarrow 0} \frac{1}{|S|} \int_C V \cdot t ds$$

したがって $\operatorname{div} V$, $\operatorname{rot} V$ はそれぞれベクトル場の発散 (わき出し), 回転 (うず) を表す.

任意の閉曲面 S を通過する流束が 0 ($\int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = 0$) であればベクトル場 V はわき出しなし ($\operatorname{div} V = 0$) であり, 任意の閉曲線 C に沿う循環が 0 ($\int_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} ds = 0$) であればベクトル場 V はうずなし ($\operatorname{rot} V = 0$) である. 単連結領域は逆も成り立つ. 特にうずなしのベクトル場 V の 2 点 P, Q を結ぶ曲線に沿う線積分 $\int_P^Q \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} ds$ は積分の経路によらない. これを始点 P を固定し, 終点 Q の関数とみなして ϕ とおけば $V = \operatorname{grad} \phi$ であり, ϕ を (スカラー) ポテンシャル ((scalar) potential) という.

S を領域 V の境界閉曲面, \mathbf{n} を外向き単位法線ベクトル, r を点 P からの距離とすると

$$-\frac{1}{4\pi} \int_S \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{n} dS = \begin{cases} 0 & P \text{ が } V \text{ の外部} \\ 1/2 & P \text{ が } S \text{ 上} \\ 1 & P \text{ が } V \text{ の内部} \end{cases}$$

となる (ガウスの公式 (Gauss' formula)). ただし $\nabla = \operatorname{grad}$ である. また次の式がなりたつ.

$$\begin{aligned} \int_S (f \nabla g) \cdot \mathbf{n} dS &= \int_V (f \Delta g + (\nabla f) \cdot (\nabla g)) dV \\ \int_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} dS &= \int_V ((f \Delta g - g \Delta f) dV \\ f(P) &= -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\Delta f}{r} dV + \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{1}{r} \nabla f - f \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

(グリーンの公式 (Green's formulae)). ただし f, g はスカラー場, r は点 P からの距離であり, Δ はラプラス演算子である.

2次元平面上ではガウスの定理, ストークスの定理は

$$\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_C P dx + Q dy$$

に帰着する (グリーンの定理 (Green's theorem)) . ただし C は領域 S を正の向きに (進行方向に対して左側が内部になるように) 回る閉曲線である . n 次元空間ではこれは

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega$$

と一般化される (一般ストークスの定理 (generalized Stokes theorem)) . ただし ∂S は領域 S の境界 , ω は微分形式 , $d\omega$ はその外微分である .

(\Rightarrow ベクトル場 , 線積分 , 面積分)

関数空間 [function space] 固定した定義域 D 上のある性質をもつ関数全体 F を一つの抽象的空間と考え，関数列をその空間の点列とみなして収束を論じたり，微分や積分などの演算をその空間の点の変換の作用素とみなして，多くの問題を統一的に扱う手法を関数解析 (あるいは位相解析) という．その抽象的空間を定義域 D 上の関数空間という．

関数空間は通常 (実，または複素) ベクトル空間 (線形空間) である．これは関数の代表的な性質が線形結合をとってもやはり成立するからである．(例えば D 上の多項式全体，連続関数全体，滑らかな関数全体，可積分関数全体)．ただし，一般に無限次元となる．

その空間で収束に関する約束 (例えば D 上の一様収束) を定めれば，これは位相空間となる．理論的な取扱いに便利のように，積分はルベーグ積分 (\Leftarrow) を用い，ほとんど至るところ (すなわち測度 0 の集合を除いて) 等しい関数は関数空間の同一点とみなす．ただし位相 (すなわち収束) の定義の仕方でいろいろな場合が考えられる．

関数空間 F の元 (すなわち関数) f に対してノルム (norm) $\|f\|$ が次のように定義されているとき， F をノルム空間 (normed space) という．

- (1) $\|f\| \geq 0$ ，等号は f がほとんど至るところ 0 のとき
- (2) $\|cf\| = |c| \cdot \|f\|$ ， c は実数または複素数
- (3) $\|f + g\| \geq \|f\| + \|g\|$ (三角不等式)

関数列 $\{f_n\}$ は $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$ のとき， f にノルム収束 (または強収束) するという．このとき $\{f_n\}$ はコーシー列 (Cauchy sequence) (または基本列) である．すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある N を選べば $m, n > N$ に対

して $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ となる。関数空間 F の任意のコーシー列 $\{f_n\}$ に対してある $f \in F$ が存在して $\{f_n\}$ が f にノルム収束するとき、関数空間 F は完備 (complete) であるという。完備なノルム空間をバナッハ空間 (Banach space) という。

代表的なノルムに次のものがある ($p > 1$)。

$$\|f\|_1 = \int_D |f(x)| dx : L_1 \text{ ノルム (1次平均ノルム)}$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_D |f(x)|^2 dx} : L_2 \text{ ノルム (2乗平均ノルム)}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in D} |f(x)| : L_\infty \text{ ノルム (一様ノルム, 上限ノルム)}$$

$$\|f\|_p = \left(\int_D |f(x)|^p dx \right)^{1/p} : L_p \text{ ノルム (} p \text{次平均ノルム)}$$

L_1, L_2, L_p ノルムによる収束を (1次, 2乗, p 次) 平均収束 (mean convergence) といい、 L_∞ ノルムによる収束を一様収束 (uniform convergence) という。数値計算による近似解の真の解への収束など多くの問題がバナッハ空間で定式化できる。

関数空間 F の2点 (すなわち二つの関数) f, g に対して内積 (inner product) (f, g) が次のように定義されているとき、 F を計量空間 (metric space) という。

- (1) $(f, f) \geq 0$, 等号は f がほとんど至るところ0のとき
- (2) $(cf, g) = c(f, g)$, c は実数または複素数
- (3) $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$
- (4) $(f, g) = \overline{(g, f)}$ (バーは複素共役)

例えば $(f, g) = \int_D f(x)\overline{g(x)}dx$ は (積分が存在すれば) 内積である .

F が計量空間のとき $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$ とすると, これはノルムであり, F はノルム空間となる . このとき $|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$ (シュワルツの不等式) がなりたつ . このノルムに関して完備である (すなわちバナッハ空間である) とき, F をヒルベルト空間 (Hilbert space) という . 量子力学を始め, 物理学の多くの問題がヒルベルト空間で定式化される .

さらに導関数の収束まで含めるもの (ソボレフ空間) など, 解析の目的によっていろいろな関数空間が用いられる .