論　文

解像度によらず位相を保つ曲線と曲面の高速表示

金澤　芳之 †　　金谷　健一 ††

Fast Display of Curves and Surfaces with Correct Topology in All Resolutions

Yoshiyuki KANAZAWA† and Kenichi KANATANI††

あらまし　ユーザが方程式によって入力した曲線や曲面を解像度によらず正しい位相（接続関係）で効率的に表示する．これは区間評価と平均値形式とクラフチック形式を用いた区間解析による臨界点の検出と領域の再帰的分割とを併用することによって実行される．本方法では終結式等の複雑な数式処理が不要であるばかりでなく，曲線や曲面が代数方程式で表される必要さえない．これを曲面の輪郭線による描画に応用する．これはワイヤフレームモデルやそのレンダリングに比べ，人間の視覚認識にとって最も自然な表示である．

キーワード　ユーザインターフェース，区間解析，臨界点，曲線，曲面，輪郭線

1.　まえがき

曲線や曲面を視覚化して表示することはグラフィクスやＣＡＤの基本であるだけでなく，数学教育の教材作成にも欠かすことができない．本報では座標の関数の零点集合として定義される平面曲線，空間曲線，及び曲面を考える．数学教育で現われる曲線のほとんどはこのような陰関数で表現されている．座標値がパラメータによって陽に表現されている場合は単にパラメータを変化させながら軌跡を表示すればよいが，陰関数で表現されている場合は表示が容易ではない．本論文ではそのための高速表示法を示す．

谷口ら [19] は陰関数が座標の多項式で書かれる代数曲線及び代数曲面の表示法を示したが，非常に非効率的なものであった．代数曲線や代数曲面はＣＡＤでよく用いられ [4], [18]，代数学の理論を応用しやすいが [17]，本論文では代数関数に限定せず，三角関数，逆三角関数，指数関数，対数関数なども含めた，いわゆる “式で書ける” 関数（正式には “初等関数”）で表せる曲線，曲面を考える．

グラフィクスやＣＡＤのみならずほとんどの数式解析ソフトでは，曲面の表示はワイヤフレームモデルに適当なレンダリングを施したものが普通である [5]．しかし，これが人間にとって自然な表示とは限らない．幼児が山を描くときはその輪郭のみを描く．人が紙に球を描けといわれれば無意識に円を描き，円錐や円柱を描けといわれれば底面を表す楕円弧と輪郭を表す直線を描くであろう．そして，人間はそのような縁と輪郭のみを見てその曲面の形状を極めて正確に想像できる．実際，人間及びコンピュータの視覚認識において輪郭に関する多くの研究がなされている [1] ~ [3], [8], [12]．しかし，ワイヤフレームに基づく表示で輪郭を成すのは曲面の真の輪郭ではなく，その近傍のワイヤでしかない．ワイヤフレームを細かくするとワイヤが密集して 3 次元形状の知覚が困難になる．本論文では輪郭を直接に表示することによってこの困難を解決する．輪郭は空間中では「輪郭母線」とよばれる空間曲線であるから [9]，曲面の表示も曲線の表示に帰着する．

2.　曲線の表示

2.1　追跡法

よく行なわれるのは，曲線上に初期点をとり，そこから曲線の方向を計算してはそれに沿って進むという追跡法である [6], [19]．追跡の方法には常微分方程式の数値解法に帰着させる方法や，ニュートン法を繰り返して適用する方法や，それらのいろいろな変形がある．しかし，次の問題が避けられない．

- 初期点を計算する一般的な方法がない．
- 複数の連結成分や孤立点や微小ループがあるとき，すべてが尽くされているかの判定が困難．

† (株) シャープ AV システム事業本部，矢板市
AV System Group, Sharp, Ltd., Yaita-shi, 329-2193 Japan
†† 群馬大学工学部情報工学科，桐生市
Department of Computer Science, Gunma University, Kiryu-shi, Gunma, 376-8515 Japan

● 曲線の異なる部分が隣接しているとき，追跡が一方から他方へ飛び越すことがある．

● 分岐や交差を生じる特異点で計算が破綻する．

谷口ら [19] は手の込んだステップ幅の調整や終結式の数式処理などによってこれらを避けることを試みているが，計算量が膨大になり，実質的には 6 次以下の曲線しか扱えない．また代数曲線ではないる曲線には適用できない．

2.2 分割法

対照的な方法は表示領域を分割し，各領域での関数の符号と値を調べて関数値が 0 になるセグメントを生成する分割法である．一律に分割する例には画像処理においてエッジをラプラシアンフィルタ画像の値 0 の曲線として求める方法（「零交差法」）がある．再帰的に分割する例には，ＣＡＤ形状モデラにおいて４分木，８分木から境界表現を得る方法がある [14], [15]．この手法によれば上述の追跡法の困難は解消されるが，次の欠点がある．

● 分割サイズ（解像度）以下の位相（接続関係）が正確には表せない．交差や孤立点や微小ループが見逃されることがある．

● 分割した各部分を接続して全体の表現を作るのが複雑になる．

● 領域を分割するために多くの計算時間を要する．

本論文では，追跡法の前述の欠点が本質的なものであって回避困難であるのに対し，分割法の上述の欠点は克服可能であることを示す．第 2 点はＣＡＤのような設計が目的の場合に問題となるが，数学教材のように単に表示が目的な場合は全体の表現は必要ではない．第 3 点は分割を粗くすれば解決する．最大の障害は第１点であるが，本論文では，臨界点の全解探索によってどんなに粗く分割しても位相が保たれるように表示する．

2.3 臨界点の全解探索

曲線の位相を定めるのは「臨界点」と「特異点」である．曲線 $f(x,y)=0$ の臨界点とは

$$f_x(x,y)=0, \qquad f_y(x,y)=0 \tag{1}$$

を満たす点であり，さらにその点で $f(x,y)=0$ となれば特異点と呼ぶ．曲線が交差，分岐する点は特異点であり，ループの内部には臨界点が存在する．曲線の二つの部分が非常に近接しているか交差しているかを判定するには谷口ら [19] のようにな複雑な数式処理は必要なく，また近接や交差を判定できるだけ解像度を上げる必要もない．なぜなら，特異点が存在すれば交差し，存在しなければ交差しないからである．孤立点や微小ループについても同様である．

表示領域内のすべての臨界点を抽出することは非線形連立方程式の全解探索に帰着する．これは電子回路の解析に関してよく研究され，代表的なものは平均値の定理と縮小写像の不動点定理を組み合わせた区間解析を用いながら空間を再帰的に分割して調べる「クラフチックの方法」及びその変形である [7], [16], [20], [21]．これらは数百，数千の変数の方程式を対象とするものであるが，平面曲線の表示では 2 変数であり，非常に効率的に実行できる．

本論文では曲線の表示に先立って，クラフチックの方法によって臨界点の全解探索を行い，それらが格子点となるように分割を行う．格子内部に臨界点の存在しないことが保証されているから，内部では交差も分岐も孤立点もループも存在しない．これによって位相を保つ折れ線表示が可能となる．曲線に滑らかさを要求するなら必要なだけ分割を細かくすればよい．

3. 区間解析

3.1 区間代数

区間解析とは関数の各引数のとる範囲を区間として指定したとき，その関数値が取り得る値を含む区間を計算することである [13], [16]．区間演算は，例えば四則演算であれば $+, -, \times, /$ を $\circ$ と書くとき，区間 I, I' に対して

$$I \circ I' = \{x \circ x' \,|\, x \in I,\, x' \in I'\} \tag{2}$$

と定義される．具体的にはそれぞれの区間の端点同士の演算によって得られる値の内の最大値と最小値を計算すればよい．実数に $+\infty, -\infty$ を付加した数体系を定義すれば常に値が常に定まる．このような区間演算は単項演算や三角関数，逆三角関数，指数関数，対数関数，その他の種々の演算に容易に拡張できる．

3.2 非零判定

関数 $f(x,y)$ の x, y のそれぞれの範囲を区間 I_x, I_y とするとき，関数 $f(x,y)$ を定義する演算をすべて区間演算に置き換えて得られる区間を $f(I_x, I_y)$ と書く．このとき $0 \notin f(I_x, I_y)$ なら曲線 $f(x,y)=0$ は領域 $I_x \times I_y$ を通過しないことが保証される．$0 \in f(I_x, I_y)$ なら領域をさらに細分すれば曲線 $f(x,y)=0$ の通過範囲をより限定することができる．

しかし，単に各変数を区間に置き換えて区間評価し

たのでは範囲が過大評価になることが多い．これを改良する方法としてよく知られているのが導関数の利用である．区間 I の中点を $I_{.m}$ と書き，関数 $f(x,y)$ の平均値形式を次のように定義する（実数は幅 0 の区間とみなして区間との演算を定義する）．

$$M_f = f(I_{x.m}, I_{y.m}) + f_x(I_x, I_y)(I_x - I_{x.m}) + f_y(I_x, I_y)(I_y - I_{y.m}) \quad (3)$$

このとき $0 \notin M_f$ なら $0 \notin f(I_x, I_y)$ が保証される [13], [16], [20]．領域 $I_x \times I_y \times I_z$ の 3 変数関数 $F(x,y,z)$ についても同様である．

3.3 連立方程式の全解探索

領域 $I_x \times I_y$ 上の連立方程式

$$f(x,y) = 0, \qquad g(x,y) = 0 \quad (4)$$

を考える．区間評価及び平均値形式によってこの領域で $f(x,y) \ni 0$ または $g(x,y) \ni 0$ と判定されれば解は存在しない．クラフチック形式を次のように定義する．

$$\begin{pmatrix} K_x \\ K_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{x.m} \\ I_{y.m} \end{pmatrix} - \boldsymbol{L} \begin{pmatrix} f(I_{x.m}, I_{y.m}) \\ g(I_{x.m}, I_{y.m}) \end{pmatrix} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}\mathcal{D}) \begin{pmatrix} I_x - I_{x.m} \\ I_y - I_{y.m} \end{pmatrix} \quad (5)$$

ただし $\boldsymbol{I}$ は 2×2 単位行列であり，$\mathcal{D}$ は次のように定義した区間勾配行列である．

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} f_x(I_x, I_y) & f_y(I_x, I_y) \\ g_x(I_x, I_y) & g_y(I_x, I_y) \end{pmatrix} \quad (6)$$

$\boldsymbol{L}$ は区間勾配行列の各要素区間の中点からなる行列の逆行列である．

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} f_x(I_x, I_y)_{.m} & f_y(I_x, I_y)_{.m} \\ g_x(I_x, I_y)_{.m} & g_y(I_x, I_y)_{.m} \end{pmatrix}^{-1} \quad (7)$$

このとき $K_x \cap I_x = \emptyset$ または $K_y \cap I_y = \emptyset$ なら領域 $I_x \times I_y$ に解が存在しないことが保証される [16], [20]．

一方，$K_x \subset I_x$ かつ $K_y \subset I_y$ のときは

$$\|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}\mathcal{D}\|_\infty < 1 \quad (8)$$

ならこの領域内に唯一の解が存在し，ニュートン法がその点に収束することが保証される [16], [20]．ただし，区間 I_{ij} を要素とする行列 $\mathcal{I} = (I_{ij})$ のニュートンノルム $\|\mathcal{I}\|_\infty$ を

$$\|\mathcal{I}\|_\infty = \max_i \sum_j \mathrm{maxabs}(I_{ij}) \quad (9)$$

と定義する（$\mathrm{maxabs}(I)$ は区間の端点の絶対値の大きいほうである）．どちらとも判定できない場合は領域をさらに細分して調べる．

4. 平面曲線の表示

曲線 $f(x,y) = 0$ を表示するには，まず指定された表示領域内部で前節の区間解析によって式 (1) の全解探索を行い，臨界点をすべて検出しておく．その後に領域を各方向に再帰的に 2 分割する．格子間隔がユーザの指定した「解像度」以下になると，内部に臨界点をもつ格子のみ臨界点が頂点となるように細分する．この分割の各ステップにおいて区間評価及び平均値形式による区間解析を行い，曲線が通過し得ないものは除外する．これによって分割が曲線の近傍に限定されるので，計算が極めて効率的となる．

このようにして定めた曲線の通過し得る各長方形領域に対して，それを囲む 4 本の辺上で $f(x,y) = 0$ となる点をすべて計算する．これは 1 変数関数の全解探索であり，その辺上で区間評価，平均値形式，及びクラフチック形式を適用する．これは前節の区間解析の 1 次元版である．1 変数関数 $f(x)$ の区間 I 上の平均値形式及びクラフチック形式はそれぞれ次のように定義される．

$$M_f = f(I_{.m}) + f'(I)(I - I_{.m}) \quad (10)$$

$$K_f = I_{.m} - \frac{f(I_{.m})}{f'(I)_{.m}} + \left(1 - \frac{f'(I)}{f'(I)_{.m}}\right)(I - I_{.m}) \quad (11)$$

$0 \notin f(I)$ または $0 \notin M_f$ または $K_f \cap I = \emptyset$ なら区間 I に解が存在しないことが保証され，$K_f \subset I_x$ のとき $|1 - f'(I)/f'(I)_{.m}| < 1$ ならならこの区間に唯一の解が存在し，ニュートン法がその点に収束することが保証される [16], [20]．しかし，実際の解の計算には解の非存在が保証されない区間の両端での関数の符号を調べては区間を細分する「はさみ打ち法」のほうが簡便であり，本システムではこちらを採用している．

次に，このようにして得られた点を結んで線分を生成する．格子内部には交差も分岐も孤立点もループも存在しないことが保証されているから，孤立点でない特異点以外は他の 1 点のみと結ばれ，かつどれも交差

しないものを候補とし，複数の候補がある場合は候補線分上で値が 0 に近いかを判定して選択する．そして，得られた線分を平面上に描画する．

上記の実行のために，あらかじめ臨界点を特異点とそうでないものに分類し，特異点をさらに孤立点と連結点とに分類しておく．それには特異点を中心とし，ユーザが指定し得る最小の解像度を半径とする円を考え，その円周上の偏角 θ の点での $f(x,y)$ の値をとる 1 変数関数 $f(\theta)$ を定義する．そして区間 $[0,2\pi]$ 上で区間評価，平均値形式，及びクラフチック形式を適用して全解探索を行い，$f(\theta)=0$ の解が存在するものを連結点，しないものを孤立点と判定する．

図 1 は交差とループのある曲線

$$x^3+y^3-3xy=0 \tag{12}$$

の領域 $[-2.5,3.2]\times[-2.5,3.2]$ の表示である．(a) は最も粗い解像度，すなわち表示領域の辺そのものを解像度とする表示である．しかし，1 個の特異点と 1 個の臨界点が存在するので図のような分割が生じ，交差とループが現れる．(b), (c) はそれぞれ解像度が 1 辺の $1/8$, $1/64$ の場合であり，曲線の近傍のみが分割されていることがわかる．図 2 は解像度を 1 辺の $1/N$ とした場合の計算時間を N に対してプロットしたものであり，ほぼ $O(N)$ である（区間解析を用いないと $O(N^2)$ となる）．図 3 は孤立点のある曲線

$$x^3+x^2+y^2=0 \tag{13}$$

を図 1 と同様に表示した例である．1 個の特異点（孤立点）と 1 個の臨界点（孤立点と曲線との間）が存在する．より複雑な例も同様に表示できる [10]．

関数 $f(x,y)$ に対して曲線 $f(x,y)-c=0$ を表示し，c を変化させれば曲面 $z=f(x,y)$ の等高線が表示できる（臨界点は c の値によらないから一度だけ計算すればよい）．図 4 はこの方法によって曲面

$$z=x^3-3x^2+3y^2 \tag{14}$$

の等高線を領域領域 $[-2.5,3.2]\times[-2.5,3.2]$ に表示した例である．曲面の特異点を通る等高線も正しい位相で表示されていることがわかる．

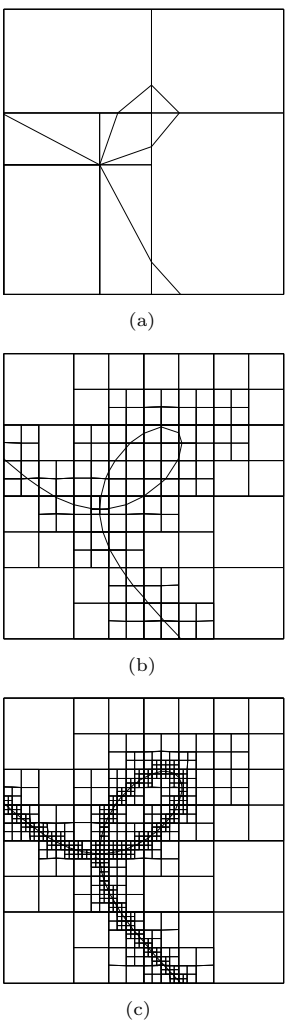


図 1　曲線 $x^3+y^3-3xy=0$ の表示とその格子分割．解像度は 1 辺の (a) 1，(b) 1/8，(c) 1/64．

Fig. 1　Display of curve $x^3+y^3-3xy=0$ and associated grid division The resolution is (a) 1, (b) 1/8, (c) 1/64 of one side of the display region.

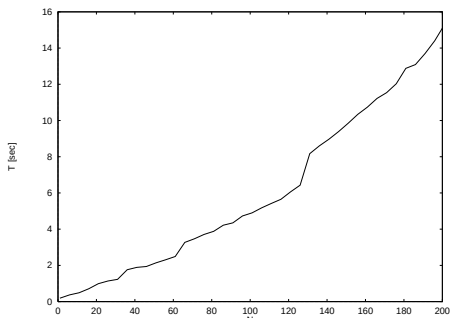
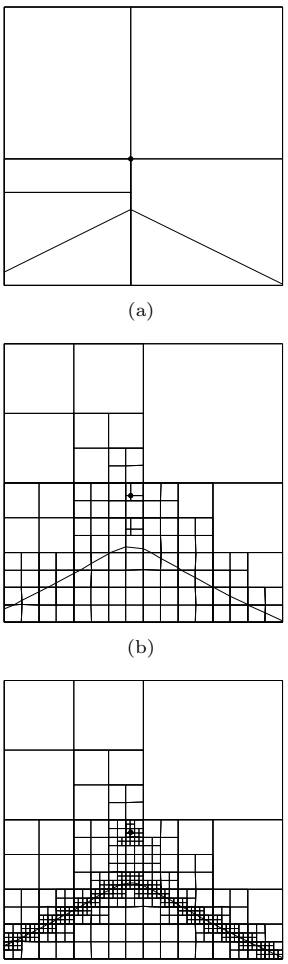


図 2　図 1 の曲線の解像度が 1 辺の $1/N$ の表示の計算時間（単位は秒）．

Fig. 2　Computation time (in seconds) of the curve in Fig. 1 when the resolution is $1/N$ of one side of the display region.



(a)

(b)

(c)

図 3　曲線 $x^3+x^2+y^2=0$ の表示とその格子分割．解像度は 1 辺の (a) 1，(b) 1/8，(c) 1/64．

Fig. 3　Display of curve $x^3+x^2+y^2=0$ and associated grid division The resolution is (a) 1, (b) 1/8, (c) 1/64 of one side of the display region.

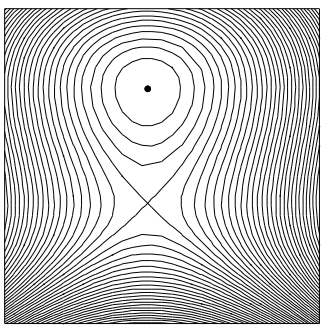


図 4　曲面 $z=x^3-3x^2+3y^2$ の等高線．
Fig. 4　Contours of curve $z=x^3-3x^2+3y^2$.

5.　空間曲線の表示

二つの方程式

$$F(x,y,z)=0, \qquad G(x,y,z)=0 \tag{15}$$

で定義される空間曲線を考える．この曲線の臨界点とは次式を満たす点である．

$$F_yG_z-F_zG_y=0, \qquad F_zG_x-F_xG_z=0$$

$$F_xG_y-F_yG_x=0, \qquad FG=0 \tag{16}$$

特に $F=G=0$ となるものが特異点であり，$F=0$, $G=0$ のそれぞれが定義する 2 曲面の接点となる．ただし，これら 2 曲面は共に滑らかであって交線上では曲面としての特異点は持たないとする．

まず指定された領域内部の臨界点をすべて検出する．これは 3 変数 x,y,z の 4 個の方程式の全解探索であるが，区間評価及び平均値形式による非零判定は各方程式に個別に適用するので 2 変数の場合と同様にできる．またクラフチック形式も式 (3) を 3 変数に拡張して得られる．式 (5) の区間勾配行列は 4×3 行列になるが，式 (6) の行列 $\boldsymbol{L}$ は区間勾配行列の各要素区間の中点からなる行列の逆行列ではなく (ムーア・ペンローズの) 一般逆行列にすればよい [11]．ニュートン ノルムの定義も解の存在判定も同様にできる．ただし，解を定めるニュートン法の更新公式が 4 個の 3 変数線形方程式となるので，これを最小二乗法によって解く [11]．

平面曲線の場合と同様に，ユーザが希望する格子間隔を「解像度」として指定すると格子間隔がそれ以下になるまで領域を各方向に再帰的に 2 分割し，内部に臨界点をもつ格子は臨界点が頂点となるように細分する．この分割の各ステップにおいて $F(x,y,z)$ 及び $G(x,y,z)$ の区間評価及び平均値形式による区間解析を行い，曲線が通過し得ないものは除外する．これによって分割が曲線の近傍に限定される．

このようにして定めた曲線の通過し得る各直方体領域に対して，それを囲む 6 個の面上で $F=0$ かつ $G=0$ となる点をすべて計算する．これは 2 変数関数の全解探索であり，各面上で区間評価，平均値形式，及びクラフチック形式を適用して計算する．そして，得られた点を結んで線分を生成する．このとき特異点以外は他の一点のみと結ばれ，かつどれも交差しないものを候補とし，複数の候補がある場合は特異点と結ぶ線分を優先し，候補線分上で値が 0 に近いかを判定し

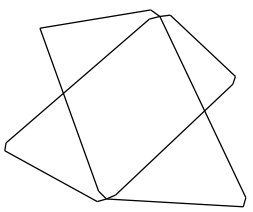
て選択する．そして得られた線分（を指定した視点から見た像）を描画する．

平面曲線の場合と同様に，あらかじめ臨界点を特異点とそうでないものに分類し，特異点をさらに孤立点と連結点とに分類しておく．それには特異点を中心とし，限界解像度を半径とする球を考え，その表面の球面座標 (θ, ϕ) の 2 変数関数 $F(\theta, \phi)$, $G(\theta, \phi)$ を定義する．そして領域 $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$ 上で区間評価，平均値形式，及びクラフチック形式を適用して全解探索を行い，$F = 0$, $G = 0$ の解が存在するものを連結点，しないものを孤立点と判定する．

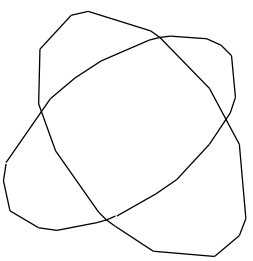
孤立点や交差点は特異点であり，これらはすべて検出されるから格子内部にはもはや存在しない．しかし平面曲線の場合と異なり，微小ループが格子内部に存在しないことは完全には保証できない．微小ループがあれば通常はその中心の近傍に 2 個の臨界点が存在するので検出されるが，臨界点の位置と格子分割のサイズの関係によっては見逃されることもあり得る．しかし，これを完全に克服するには複雑な処理が必要となり，また適切な分割サイズを選べば解決するので，本システムではこれは課題として残し，これ以上は深入りしないことにする．

二つの楕円体

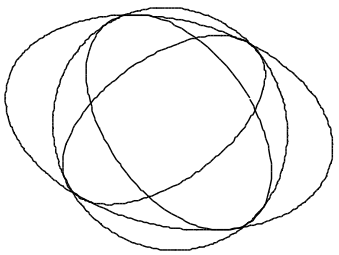
$$3x^2 + y^2 + 2z^2 = 1, \quad 3x^2 + 2y^2 + z^2 = \beta \quad (17)$$



(a)



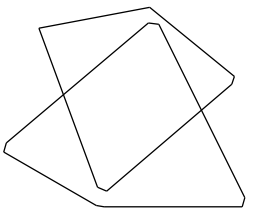
(b)



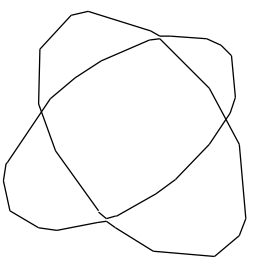
(c)

図 5　二つの楕円体の交線（特異点が生じる）．解像度は 1 辺の (a) 1/2，(b) 1/8，(c) 1/32．

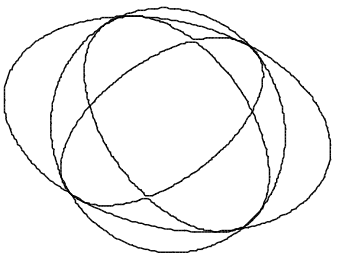
Fig. 5　Intersection of two ellipsoids (with a singularity). The resolution is (a) 1/2, (b) 1/8, (c) 1/32 of one side of the display region.



(a)



(b)



(c)

図 6　二つの楕円体の交線（特異点が生じない）．解像度は 1 辺の (a) 1/2，(b) 1/8，(c) 1/32．

Fig. 6　Intersection of two ellipsoids (without a singularity). The resolution is (a) 1/2, (b) 1/8, (c) 1/32 of one side of the display region.

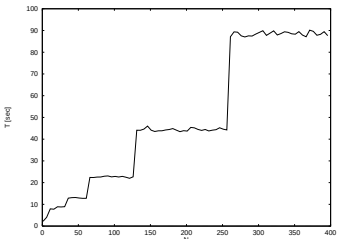


図 7　図 5 の曲線の解像度が一辺の $1/N$ の表示の計算時間 (単位は秒) .

Fig. 7　Computation time (in seconds) of the curve in Fig. 5 when the resolution is $1/N$ of one side of the display region.

は $\beta \neq 1$ のとき二つの環状の交線をもち , $\beta = 1$ のとき特異点が生じて両者が交わる . 図 5 はこのときの交線を領域 $[-1.2, 1.3] \times [-1.2, 1.3] \times [-1.2, 1.3]$ に解像度を 1 辺の $1/2$, $1/8$, $1/32$ として表示した例である . 見やすさのために (c) ではそれぞれの楕円体の輪郭も表示している (方法は後述) . 特異点が解像度によらず正しく示されていることがわかる . 図 6 は比較として $\beta = 1 + 10^{-6}$ の場合の交線を同様に表示したものである . このように曲線が近接しているとき , 表示によっては交わっているように見えても生成した線分自体は離れているので , 拡大表示すれば離れて見える . また解像度を下げても位相が正しく表示されることがわかる .

図 7 は解像度を一辺の $1/N$ とした場合の図 5 の交線の表示の計算時間を N に対してプロットしたものであり , ほぼ $O(N)$ である (区間解析を用いないと $O(N^3)$ となる) .

6.　曲面の表示

序論で述べたように , 曲面の表示は輪郭線と縁によって表示するのが最も自然である .

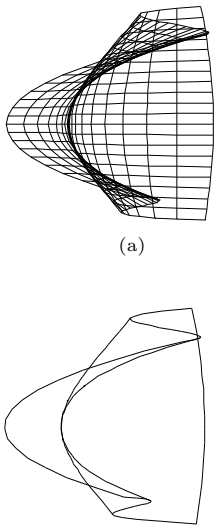
6.1　グラフ表現

曲面

$$z = f(x, y) \tag{18}$$

の輪郭線と縁による表示を考える . 縁は表示領域の周上を解像度の幅に刻み , それに高さ z を付与した点を結んで空間に折れ線で描画すればよい . 視点$V : (v_1, v_2, v_3)$から見たときに , この曲面上の点$P : (x, y, z)$が輪郭母線上にある必要十分条件は , 点 P における接平面が視点 V を含むことであり , 次のように書ける [9] .

$$(x - v_1)f_x + (y - v_2)f_y - (f - v_3) = 0 \tag{19}$$



(a)

(b)

図 8　曲面 $z = x^2 - x^2y + y^3$ の表示 . (a) ワイヤーフレーム表示 . (b) 輪郭線表示 .

Fig. 8　Display of surface $z = x^2 - x^2y + y^3$. (a) Wireframes. (b) Occluding contours.

したがって xy 面上の表示領域においてこの式の定義する曲線の線分を生成し , 両端に z 座標を付与した空間の線分を定義し , 視点 v から見た像を表示すればよい .

図 8 は曲面

$$z = x^2 - x^2y + y^3 \tag{20}$$

のワイヤフレーム表示 (x, y が一定の平面との交線) と輪郭線表示を比較したものである . 解像度は定義域の一辺の $1/8$ である . 輪郭線表示では「くちびる」と呼ばれる輪郭線の特異点の位相が正しく表示されている [8], [9], [12] . このような形状は従来のワイヤフレーム表示やそれに陰影やテクスチャを施したレンダリングでは理解するのが困難である .

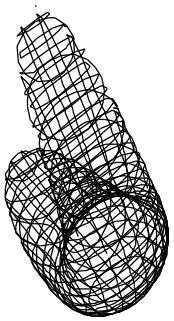
6.2　陰表現

曲面

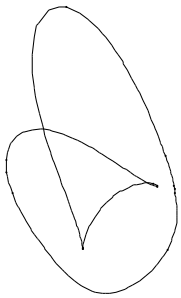
$$F(x, y, z) = 0 \tag{21}$$

の表示を考える . 視点$V : (v_1, v_2, v_3)$から見たときに , この曲面上の点$P : (x, y, z)$が輪郭母線上にある必要十分条件は , 点 P における接平面が視点 V を含むことであり , 次のように書ける [9] .

$$F = 0,$$



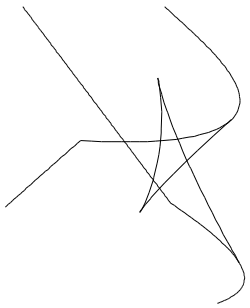
(a)



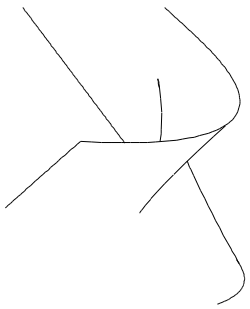
(b)

図 9　曲面 $23x^4+x^2y^2-37x^2y-2xy^2-15x^2-2xy+16y^2+16z^2-x+16y=0$ 表示．(a) ワイヤフレーム表示．(b) 輪郭線表示．

Fig. 9　Display of surface $23x^4+x^2y^2-37x^2y-2xy^2-15x^2-2xy+16y^2+16z^2-x+16y=0$. (a) Wireframes. (b) Occluding contours.



(a)



(b)

図 10　曲面 $z=xy+y^4$ の輪郭線表示．(a) すべての輪郭線を表示．(b) 隠線除去の結果．

Fig. 10　Occluding contours of surface $z=xy+y^4$. (a) All contours. (b) Hidden line removal.

$$(x-v_1)F_x+(y-v_2)F_y+(z-v_3)F_z=0 \quad (22)$$

したがって，これら 2 式の表す空間曲線を線分の集合として定義し，視点 v から見た像を表示すればよい．

図 9 は曲面

$$23x^4+x^2y^2-37x^2y-2xy^2-15x^2 \\ -2xy+16y^2+16z^2-x+16y=0 \quad (23)$$

のワイヤフレーム表示 (x, y, z がそれぞれ一定の平面との交線) と輪郭線表示を比較したものである．輪郭線表示では「くさび」呼ばれる輪郭線の特異点よく現れている [8], [9], [12]．

6.3　隠線除去

図 8, 9 は向こう側が透けて見える透明な曲面として描いてあるが，曲面を不透明として隠線を除去することは容易である．曲面上の点の可視性を判定は，視点とその点を結ぶ線分上で $F=0$ となる解の存在判定に帰着する．これは 1 変数方程式の解の存在を調べることであり，式 (10) の平均値形式，式 (11) のクラフチック形式を用いた全解探索によって容易に実行できる．そして，輪郭線を構成する各線分の両端に対して可視性を判定し，両端が見えないものは除去する．両端で判定の異なるものは 2 分割してこれを再帰的に実行する．図 10 は曲面

$$z=xy+y^4 \quad (24)$$

の輪郭線表示とそれに隠線除去を施したものとの比較である．このようにレンダリングを施さなくても輪郭線のみで形状がよく理解できる．

7.　まとめ

本論文では，ユーザが方程式によって入力した曲線や曲面を解像度によらず正しい位相 (接続関係) で効率的に表示する方法を示した．まず従来の追跡法の問題点を指摘し，次に区間評価と平均値形式とクラフチック形式を用いた区間解析による臨界点の全解探索と領域の再帰的分割とを併用する方法を述べた．そして，

この方法によれば解像度を変えても位相が正しく保たれることを実験的に確認した．本方法では谷口ら [19] のように交差や分岐やループの判定のために終結式等の複雑な数式処理が不要であるばかりでなく，曲線が代数方程式で表される必要さえない．これを曲面の輪郭線による描画に応用した．これはワイヤフレームモデルやそのレンダリングに比べ，人間の視覚認識にとって最も自然な表示である．

本論文のシステムでは C++言語により区間オブジェクトとその演算を定義している．その結果，変数の型を区間と指定すればあたかも実数演算であるかのように計算が実行される．また数式処理によって導関数の導出を自動化し，それから区間導関数のプログラムを生成している．なお，計算には Pentium Pro 200MHz 搭載 PC/AT 互換機を用い，OS は Linux 2.0(Slackware 3.5)，コンパイルは GCC 2.7.2.3 を用いた．

謝辞　区間解析についてご教示頂いた中央大学の山村清隆教授，及び自動微分についてご教示頂いた豊橋技術科学大学の金沢靖講師，中央大学の久保田光一助教授，電気通信大学の吉田利信助教授に感謝します．本研究の一部は文部省科学研究費基盤研究Ｃ（２）(No. 11680377) によった．

文献

[1] V. I. Arnol'd, "Catastrophe Theory," Springer, Berlin, 1984; 蟹江幸博（訳），"カタストロフ理論，" 現代数学社，京都，1985; Third Revised and Expanded Edition, Springer, Berlin, 1992.

[2] J. W. Bruce, "Seeing—the mathematical viewpoint," Math. Intell., vol.6, no.4, pp.18–25, 1984.

[3] R. Cipolla, "Active Visual Inference of Surface Shape," Springer, Berlin, 1995.

[4] G. Farin, "Curves and Surfaces or Computer Aided Geometric Design: A Practical Guide," Second Edition, Academic Press, San Diego, CA, U.S.A., 1990; 木村文彦（監），山口泰（監訳），"CAGD のための曲線・曲面理論," 共立出版，東京，1991; Third Edition, Academic Press, San Diego, CA, U.S.A. 1993.

[5] A. Gray, "Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces," CRC Press, Boca Raton, FL, 1993; 小島順（監訳），"Mathematica 曲線と曲面の微分幾何，" トッパン，東京，1996.

[6] M. Hosaka, "Modeling of Curves and Surfaces in CAD/CAM," Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1992; 東正毅, 斉藤剛, 久志本琢也（訳），"CAD/CAM における曲線曲面のモデリング，" 東京電機大学出版局，東京，1996.

[7] 神沢雄智，柏木雅英，大石進一，"パラメータ依存非線形方程式のすべての解を精度保証付きで求めるアルゴリズム，" 電子情報通信学会論文誌 A, vol.J80-A, no.6, 1997, June pp.920–925,

[8] 金谷健一, 曲面の見え方—「蝶」,「がちょう」,「かもめ」を探してみよう—, ｂｉｔ, vol.29, no.2, pp. 102–103, Feb. 1997.

[9] 金谷健一，形状ＣＡＤと図形の数学, 共立出版, 東京, 1998.

[10] 金澤芳之, 金谷健一, 解像度によらず位相を保つ平面曲線の表示, 情処研報 99-CG-94, Jan. 1999, pp.37–42.

[11] 金澤芳之, 金谷健一, 直観的に正しい空間曲線と曲面の表示，信学技報 AIE98/KBSE98, Feb. 1999, pp.37–42.

[12] J. J. Koenderink, "Solid Shape," MIT Press, Cambridge, MA, 1990.

[13] R. E. Moore, "Methods and Applications of Interval Analysis," SIAM, Philadelphia, 1979.

[14] 森本経宇, 山口和紀, 再帰的空間分割法と部分空間分類—微小空間の曲線の近似への拡張—, 電子情報通信学会論文誌 D-II, vol.J80-D-II, no.2, pp.569–578, Feb. 1997.

[15] 西尾孝治, 小堀研一, 久津輪敏郎, 拡張型オクトリーを用いた空間分割モデラから境界表現への変換, 情報処理学会論文誌, vol.38, no.8, pp.1554–1565, Aug. 1997.

[16] 大石進一, 非線形減少の解析的手法 [I]—非線形現象の精度保証付き数値解析, 電子情報通信学会誌, vol.79, no.2, pp.162–168, Feb. 1996.

[17] 佐々木建昭, 元吉文男, 渡辺隼郎, "数式処理システム," 昭晃堂, 東京, 1986.

[18] 杉原厚吉, "グラフィクスの数理," 共立出版, 東京, 1995.

[19] 谷口行信, 杉原厚吉, 検出もれのない代数曲線の追跡法, 情報処理学会論文誌, vol.33, no.10, pp.1245–1253, Oct. 1992.

[20] 山村清隆, 非線形現象の解析手法 [V]—非線形方程式の数値解法—, 電子情報通信学会誌, vol.79, no.7, pp.740–745, July 1996.

[21] 山村清隆, 徳江愛, 川田仁美, 区間解析を用いた非線形抵抗回路のすべての解を求めるアルゴリズム, 電子情報通信学会論文集 A, vol.J79-A, no.10, pp.1692–1699, Oct. 1996.

（平成 11 年 2 月 24 日受付，6 月 21 日再受付）

金澤　芳之

1997 年群大・工・情報卒．1999 年同大学院修士課程了．同年 (株) シャープ入社．在学中，コンピュータビジョン，コンピュータグラフィクスの研究に従事．現在，液晶ディジタルシステムの設計開発に携わる．

金谷　健一　（正員）

1972 年東大・工・計数（数理工学）卒．1979 年同大学院博士課程了．工博．現在，群馬大学工学部情報工学科教授．詳細は下記参照: http://www.ail.cs.gunma-u.ac.jp/~kanatani/j