

2 画像からの三角測量: Hartley-Sturm vs. 最適補正

金谷 健一* 菅谷 保之† 新妻 弘崇*

* 岡山大学大学院自然科学研究科 † 豊橋技術科学大学情報工学系

ステレオ視によって 2 画像から対応点の 3 次元位置を復元する計算法として、筆者らが以前に提案した最適補正の高次補正法を示し、これを Hartley-Sturm 法と実験的に比較する。まず Hartley-Sturm 法はエピ極点の特異点となり、そこで計算が破綻するが、筆者らの最適補正には特異性が存在しないことを指摘する。ただし、それ以外では両者は同一の解を計算する。一方、実行時間は本論文の方法が Hartley-Sturm 法に比べて著しく効率的である。これらのことを数値実験によって実証し、実際の応用では筆者らの最適補正を用いればよく、Hartley-Sturm 法を用いる理由は見当たらないことを示す。

Triangulation from Two Views: Hartley-Sturm vs. Optimal Correction

Kenichi Kanatani*, Yasuyuki Sugaya†, and Hirotaka Niitsuma*

*Department of Computer Science, Okayama University, Okayama 700-8530 Japan

†Department of Information and Computer Sciences,
Toyohashi University of Technology, Toyohashi, Aichi 441-8580 Japan

A higher order scheme is presented for the optimal correction method previously proposed by the authors for computing the 3-D position of corresponding points in a stereo image pair, and this method is experimentally compared with the Hartley-Sturm method. We first point out that the epipole is a singularity of the Hartley-Sturm method, while the authors' optimal correction has no singularities. We confirm by numerical simulation that both compute identical solutions at other points. It can be shown, however, that our method is significantly faster than the Hartley-Sturm method. Hence, no advantage is found for using the Hartley-Sturm method.

1. まえがき

ステレオ視では 2 画像間の対応点が定まると、視点(カメラのレンズ中心)と画像面上のその点を通る視線の交点としてその点の 3 次元位置が定まる。これが「三角測量」と呼ばれるものである。2 画像からの 3 次元復元においても、複数の対応点対から基礎行列が求まり、それから 2 台のカメラの位置や向きや焦点距離が定まるから [6], ステレオ視に帰着する。

しかし、実際には計算した 2 本の視線はデータに含まれる誤差のために 1 点では交わらない。そこで古くから、その 2 本を最短距離に結ぶ線分の“中点”をとることが行われていた。それに対して筆者らは 1990 年代前半に、それが最善ではないこと、最善の方法は、画像面上の対応点をそれぞれ視線が交わる位置に移動させ、これをその移動量が最小になるよ

うに定めることであることを指摘し、その簡単な計算法を示した¹[9, 10]。これが「最適補正」の考え方である² [4, 5]。

ところが、その後 Hartley ら [2] がこれと同じ考え方を述べ、その計算を 6 次方程式の解計算に帰着させた³(付録参照)。しかし、Hartley ら [2] は彼らの方法を上述の“中点法”と比較しているのみで、筆者らの最適補正については何も述べていない。

もちろん、一部の研究者は彼らの方法よりも筆者らの最適補正のほうが実用的であることに気づいていた。実際、Torr ら [12] は筆者らの最適補正が Hartley-Sturm 法と実質的に同じ解を与えるが、計算は数倍のオーダーだけ速いと述べている⁴。それにもかかわ

¹この今日当然のことも、当時のステレオ視を実践していた研究者からは理論偏重だとして、相手にされなかった。

²これを Int. J. Comput. Vision に投稿すると、過度に数学的であると厳しく批判され、不採録になった。

³原論文には式の誤りがあり、後に出版された著書 [3] ではそれが修正されている。

⁴原文: Hartley and Sturm [13] provide ... This turns out to be equivalent to the optimally corrected correspondence of Kanatani [16]. Comparisons of the computation of \hat{x} and \hat{x}'

*700-8530 岡山市津島中 3-1-1, (086)251-8173
{kanatani,niitsuma}@suri.it.okayama-u.ac.jp
†441-8580 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1-1
sugaya@iim.ics.tut.ac.jp

らず、筆者らの最適補正が無視され、非効率な6次方程式法が“標準”となり、世界中の研究者が従っている⁵。

本論文の目的は、Hartley-Sturm法を筆者らの最適補正と実験的に比較することである。筆者らが以前に示した最適補正は1次近似であったが、本論文ではまずこれを高次の補正に拡張する。そして、Hartley-Sturm法の方法はエピ極点が特異点となり、そこで計算が破綻するが、最適補正には特異性が存在しないことを指摘する。しかし、それ以外では両者は同一の解を計算する。一方、実行時間は本論文の方法がHartley-Sturm法に比べて著しく効率的である。これらのことを数値実験によって検証し、実際の応用では最適補正を用いればよく、Hartley-Sturm法を用いる理由がないことを結論する。

2. エピ極線方程式

2画像間で点 (x, y) と点 (x', y') が対応しているとき、これらを次の3次元ベクトルで表す。

$$x = \begin{pmatrix} x/f_0 \\ y/f_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x' = \begin{pmatrix} x'/f_0 \\ y'/f_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

ただし、 f_0 は任意のスケール定数である⁶。以下、ベクトル x, x' の表す点を単に“点 x ”、“点 x' ”などと略記する。

よく知られているように[3, 5]、点 x を通る視線と点 x' を通る視線が1点で交わる必要十分条件は、これらが次の「エピ極線方程式」を満たすことである。

$$(x, Fx') = 0 \quad (2)$$

以下、本論文ではベクトル a, b の内積を (a, b) と書く。式中の F は「基礎行列」と呼ばれるランク2の行列である⁷。これは2台のカメラの相対的な位置や

by Hartley and Sturm's method and that of Kanatani have again shown agreement to three or four significant figures, as mentioned, but Kanatani's method is several orders of magnitude faster, being a linear method and hence preferable for rapid evaluation purposes.

⁵同じことが基礎行列の計算法でも生じた。Hartley [1]が“8点法”を発表し、その精度が“著しく低くはない”と主張したため、それが研究者の“標準”となり、はるかに精度が高い最適計算法[5, 7, 8]の普及が妨げられた。

⁶これをほぼ画像のサイズにとり、ベクトル x, x' の各成分がオーダー1にそろえて数値計算を安定化させるためである。これも筆者らはHartley [1]が指摘するはるか以前から実践していた。我々の実験では $f_0 = 600$ としたが、 $f_0 = 1$ としても実際には問題ない。

⁷Hartleyらの文献[1, 2]ではその転置を「基礎行列」と定義している。

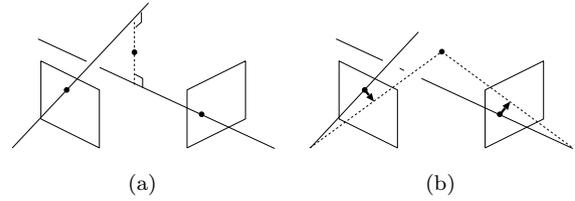


図1: 三角測量の原理。(a) 中点法。(b) 最適補正。

向きや内部パラメータ(焦点距離など)によるのみ定まり、シーンや対応点の位置にはよらない[3, 5]。基礎行列 F はカメラ校正によって定めることができるが、画像中の多数の対応点から計算することもできる[3, 5, 7, 8]。以下では基礎行列 F は既に求められているとする。

3. 最適補正

対応点 x, x' を画像処理や計算から求めた場合には微小な誤差のために式(2)が厳密には満たされない。これは幾何学的にはそれらの視線が1点で交わらないことを意味する。このとき、求める3次元位置をそれらの視線を最短距離で結ぶ線分の中点とするのが先に述べた「中点法」である(図1(a))。

それに対して「最適補正」は点 x, x' を式(2)を満たすよう最適に \hat{x}, \hat{x}' に補正することである(図1(b))。“最適に”というのは、移動距離の二乗和(「再投影誤差」と呼ばれる[3])

$$E = \|x - \bar{x}\|^2 + \|x' - \bar{x}'\|^2 \quad (3)$$

が最小になるという意味である。数学的には、与えられたデータ x, x' に対して、制約条件

$$(\bar{x}, F\bar{x}') = 0 \quad (4)$$

のもとで式(3)を最小にする \bar{x}, \bar{x}' を求めよという問題となる。統計的には次のようにも解釈できる。対応点の真の位置が \bar{x}, \bar{x}' であるとき、ノイズの加わった

$$x = \bar{x} + \Delta x, \quad x' = \bar{x}' + \Delta x' \quad (5)$$

が検出されたとする。ノイズ $\Delta x, \Delta x'$ を期待値0、画像上で独立で同一の等方正規分布に従う確率変数とみなしたとき、式(3)の最小化は尤度を最大にする最尤推定である。

4. 第1近似

筆者らが与えた最適補正は次のように導出される[4, 5, 9, 10]。直接に \bar{x}, \bar{x}' を推定する代わりに

$$\bar{x} = x - \Delta x, \quad \bar{x}' = x' - \Delta x' \quad (6)$$

と置いて，誤差項 $\Delta x, \Delta x'$ を推定してもよい．すると式 (3) の再投影誤差 E は次のように書ける．

$$E = \|\Delta x\|^2 + \|\Delta x'\|^2 \quad (7)$$

エビ極線方程式 (4) は次のようになる．

$$(x - \Delta x, F(x' - \Delta x')) = 0 \quad (8)$$

テイラー展開して誤差 $\Delta x, \Delta x'$ の 2 次の項を無視すると次のようになる．

$$(F x', \Delta x) + (F^\top x, \Delta x') = (x, F x') \quad (9)$$

誤差は画像面内に生じるので $\Delta x, \Delta x'$ の第 3 成分は 0 である．これは次のように書ける．

$$(k, \Delta x) = 0, \quad (k, \Delta x') = 0 \quad (10)$$

ただし， $k = (0, 0, 1)^\top$ と定義する．式 (9), (10) に関するラグランジュ乗数を導入して

$$\begin{aligned} & \|\Delta x\|^2 + \|\Delta x'\|^2 - \lambda \left((F x', \Delta x) + (F^\top x, \Delta x') \right) \\ & - \mu(k, \Delta x) - \mu'(k, \Delta x') \end{aligned} \quad (11)$$

を $\Delta x, \Delta x'$ で微分して 0 と置くと次のようになる．

$$\begin{aligned} 2\Delta x - \lambda F x' - \mu k &= 0, \\ 2\Delta x' - \lambda F^\top x - \mu' k &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

両辺に射影行列 (第 3 成分を 0 にする行列)

$$P_k = \text{diag}(1, 1, 0) \quad (13)$$

を掛けると， $P_k \Delta x = \Delta x, P_k \Delta x' = \Delta x', P_k k = 0$ であるから，次のようになる．

$$\begin{aligned} 2\Delta x - \lambda P_k F x' &= 0, \\ 2\Delta x' - \lambda P_k F^\top x &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

ゆえに次のように書ける．

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2} P_k F x', \quad \Delta x' = \frac{\lambda}{2} P_k F^\top x \quad (15)$$

これを式 (9) に代入すると次のようになる．

$$(F x', \frac{\lambda}{2} P_k F x') + (F^\top x, \frac{\lambda}{2} P_k F^\top x) = (x, F x') \quad (16)$$

これから λ が次のように定まる．

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{(x, F x')}{(F x', P_k F x') + (F^\top x, P_k F^\top x)} \quad (17)$$

したがって式 (15) は次のようになる．

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{(x, F x') P_k F x'}{(F x', P_k F x') + (F^\top x, P_k F^\top x)}, \\ \Delta x' &= \frac{(x, F x') P_k F^\top x}{(F x', P_k F x') + (F^\top x, P_k F^\top x)} \end{aligned} \quad (18)$$

ゆえに，真の位置 \bar{x}, \bar{x}' は次のように推定される．

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x - \frac{(x, F x') P_k F x'}{(F x', P_k F x') + (F^\top x, P_k F^\top x)}, \\ \hat{x}' &= x' - \frac{(x, F x') P_k F^\top x}{(F x', P_k F x') + (F^\top x, P_k F^\top x)} \end{aligned} \quad (19)$$

5. 解の改善

式 (19) の \hat{x}, \hat{x}' は厳密に $(\hat{x}, F \hat{x}') = 0$ を満たしているとは限らない．本論文ではこの解を利用して，式 (4) の条件のもとで式 (3) を最小化する厳密解 \bar{x}, \bar{x}' を得る手順を新たに示す．このとき，直接に \bar{x}, \bar{x}' を推定する代わりに

$$\bar{x} = \hat{x} - \Delta \hat{x}, \quad \bar{x}' = \hat{x}' - \Delta \hat{x}' \quad (20)$$

と置いて，2 次の補正量 $\Delta \hat{x}, \Delta \hat{x}'$ を推定する．これらは式 (18) の $\Delta x, \Delta x'$ よりも高次の微小量である．式 (20) を式 (3) に代入すると次のようになる．

$$E = \|\bar{x} + \Delta \hat{x}\|^2 + \|\bar{x}' + \Delta \hat{x}'\|^2 \quad (21)$$

ただし，次のように置いた．

$$\tilde{x} = x - \hat{x}, \quad \tilde{x}' = x' - \hat{x}' \quad (22)$$

式 (4) のエビ極線方程式は次のようになる．

$$(\hat{x} - \Delta \hat{x}, F(\hat{x}' - \Delta \hat{x}')) = 0 \quad (23)$$

テイラー展開して $\Delta \hat{x}, \Delta \hat{x}'$ の 2 次の項を無視すると，次のようになる．

$$(F \hat{x}', \Delta \hat{x}) + (F^\top \hat{x}, \Delta \hat{x}') = (\hat{x}, F \hat{x}') \quad (24)$$

$\Delta \hat{x}, \Delta \hat{x}'$ は式 (18) の $\Delta x, \Delta x'$ よりも高次の微小量であるから，その 2 次の項を無視した式 (24) は式 (9) よりもエビ極線方程式のより高次の近似式である．誤差は画像面内に生じるので，式 (10) と同様に次の制約がある．

$$(k, \Delta \hat{x}) = 0, \quad (k, \Delta \hat{x}') = 0 \quad (25)$$

一方、ベクトル $\hat{\xi}$ を

$$\hat{\xi} = \begin{pmatrix} \hat{x}\hat{x}' + \hat{x}'\tilde{x} + \hat{x}\tilde{x}' \\ \hat{x}\hat{y}' + \hat{y}'\tilde{x} + \hat{x}\tilde{y}' \\ f_0(\hat{x} + \tilde{x}) \\ \hat{y}\hat{x}' + \hat{x}'\tilde{y} + \hat{y}\tilde{x}' \\ \hat{y}\hat{y}' + \hat{y}'\tilde{y} + \hat{y}\tilde{y}' \\ f_0(\hat{y} + \tilde{y}) \\ f_0(\hat{x}' + \tilde{x}') \\ f_0(\hat{y}' + \tilde{y}') \\ f_0^2 \end{pmatrix} \quad (40)$$

と定義すると、式 (33) の分子、分母の一部が次のように書き直せる。

$$(\hat{x}, F\hat{x}') + (F\hat{x}', \tilde{x}) + (F^\top \hat{x}, \tilde{x}') = \frac{1}{f_0^2}(\mathbf{u}, \hat{\xi}) \quad (41)$$

$$(F\hat{x}', P_k F\hat{x}') + (F^\top \hat{x}, P_k F^\top \hat{x}) = \frac{1}{f_0^2}(\mathbf{u}, V_0[\hat{\xi}]\mathbf{u}) \quad (42)$$

ただし、 $V_0[\hat{\xi}]$ は式 (38) において、 x, y, x', y' をそれぞれ $\hat{x}, \hat{y}', \hat{x}', \hat{y}'$ に置き換えたものである。式 (41), (42) より、式 (33) は次のように書き直せる。

$$\hat{x} = x - \frac{(\mathbf{u}, \hat{\xi})P_k F\hat{x}'}{(\mathbf{u}, V_0[\hat{\xi}]\mathbf{u})}, \quad \hat{x}' = x' - \frac{(\mathbf{u}, \hat{\xi})P_k F^\top \hat{x}}{(\mathbf{u}, V_0[\hat{\xi}]\mathbf{u})} \quad (43)$$

以上より次の計算手順が得られる。

1. 再投影誤差を $E_0 = \infty$ (十分大きい数) と置き、次のように初期化する。

$$\hat{x} = x, \quad \hat{x}' = x', \quad \tilde{x} = \tilde{x}' = \mathbf{0} \quad (44)$$

2. 式 (40) の 9 次元ベクトル $\hat{\xi}$ と式 (38) の 9×9 行列 $V_0[\hat{\xi}]$ を計算する。
3. \tilde{x}, \tilde{x}' を次のように更新する。

$$\tilde{x} \leftarrow \frac{(\mathbf{u}, \hat{\xi})P_k F\hat{x}'}{(\mathbf{u}, V_0[\hat{\xi}]\mathbf{u})}, \quad \tilde{x}' \leftarrow \frac{(\mathbf{u}, \hat{\xi})P_k F^\top \hat{x}}{(\mathbf{u}, V_0[\hat{\xi}]\mathbf{u})} \quad (45)$$

4. 再投影誤差 E を次のように計算する。

$$E = \|\tilde{x}\|^2 + \|\tilde{x}'\|^2 \quad (46)$$

5. $E \approx E_0$ なら E を返して終了する。そうでなければ E_0, \hat{x}, \hat{x}' を次のように更新してステップ 3 に戻る。

$$E_0 \leftarrow E, \quad \hat{x} \leftarrow x - \tilde{x}, \quad \hat{x}' \leftarrow x' - \tilde{x}' \quad (47)$$

上記手順のステップ 3 で終了すると、筆者らが以前に与えた最適補正の第 1 近似 [4, 5, 9, 10] となる

7. エピ極点の問題

第 1 画像の点 x が $F^\top x = 0$ となる時、あるいは第 2 画像の点 x' が $F x' = 0$ となる時、それらは「エピ極点」と呼ばれ、他方の画像を撮影するカメラの視点の位置を表す [3]。

Hartley-Sturm 法 (付録参照) では対応点が原点に来るように画像を並進し、エピ極点が x 軸上に載るように画像を回転する。そして、原点からエピ極線 (エピ極点を通る直線) に下した垂線の足を補正位置とし、その再投影誤差 (両画像のエピ極線の原点からの距離の 2 乗和) が最小となるようなエピ極線の組を探索している。

しかし、エピ極点に対してはエピ極線が定義されないため、対応点の一方または両方がエピ極点に一致すると計算が破綻する。Hartley ら [2] はあらかじめその場合を判定し、例外処理を行う必要があると述べている。

一方、前節の最適補正の計算では、分母は式 (45) の $(\mathbf{u}, V_0[\hat{\xi}]\mathbf{u})$ のみであり、式 (36), (37), (41), (42) より、これが 0 になるのは x, x' (あるいは反復途中の補正位置 \hat{x}, \hat{x}') がともにエピ極点に一致する場合のみである。したがって、一方の点がエピ極点に一致しても何ら問題が生じない。

一方の点がエピ極点に一致すると、式 (45) より、その点はエピ極点から“引き離される”ように補正され、他方のエピ極点にない点は補正されない⁹。対応点が両方ともエピ極点に一致すれば式 (45) の分子が 0 になるので、何の補正も行われずその時点で計算は終了する¹⁰。

Hartley-Sturm 法では前処理によって対応点の一方、あるいは両方がエピ極点に一致する場合をあらかじめ除外することによって計算上の破綻は避けている。筆者らの最適補正はその必要がないという意味で理論的にはより適応範囲が広いといえる。ただし、実際問題ではこのような差が問題になることはないであろう。

8. 比較実験

図 2(a), (b) は格子状に配置した点を 2 台のカメラから撮影した 2 種類の画像対である (サイズ 400×400)

⁹Hartley-Sturm 法の例外処理は逆に、エピ極点でない点をエピ極点に移動させている。

¹⁰もちろん式 (45) の分母も 0 になるが、分子が 0 と判定されれば分数全体を 0 とするようにプログラムすれば計算上の問題は生じない。

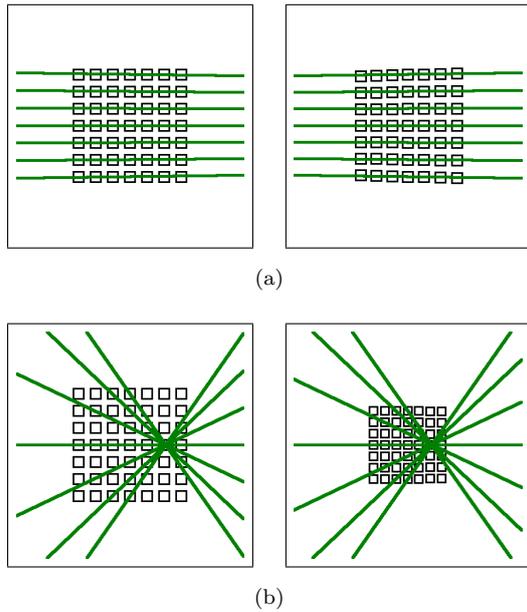


図 2: 平面格子パタンのステレオ画像対とエピ極線。(a) 安定なカメラ配置 (b) 不安定なカメラ配置

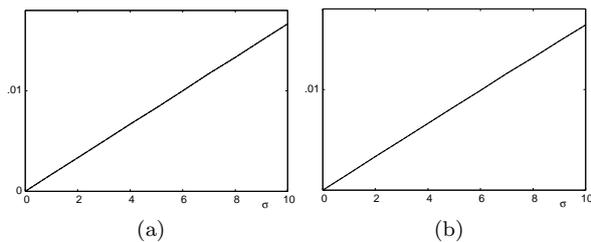


図 3: 平方平均再投影誤差. 実線: 最適補正. 破線: Hartley-Sturm 法. (a) 安定なカメラ配置 (b) 不安定なカメラ配置

画素, 焦点距離 $f = 1200$ 画素を想定). 図 2(a) はカメラを“横方向”(= 奥行きをあまり変化させない方向)に移動させたもので, 3次元復元の精度よいことが知られた安定なカメラ配置である. 図 2(b) はカメラを“縦方向”(= 奥行き方向)に移動させたもので, 計算される 3次元位置が画像のノイズの影響を受けやすい不安定なカメラ配置である. 図中にいくつかの点のエピ極線を記入している. それらの交点がエピ極点(他方のカメラの視点方向)である.

8.1 再投影誤差の比較

各格子点を対応点とし, その x, y 座標に独立に期待値 0, 標準偏差 σ の正規分布に従うノイズを加え, 各 σ ごとにノイズを 1000 回発生させ, 各々の点の補正を行った. 図 3 は横軸に σ をとり, 再投影誤差

$$E = \|x - \hat{x}\|^2 + \|x' - \hat{x}'\|^2 \quad (48)$$

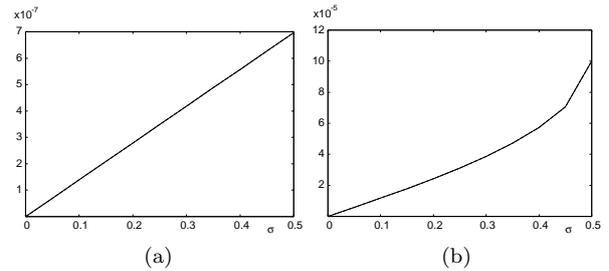


図 4: 復元した 3次元位置の逆距離の平方平均二乗誤差. (a) 安定なカメラ配置 (b) 不安定なカメラ配置

の各点の平均値を異なる誤差に対して平均したものの平方根(平方平均再投影誤差)をプロットしたものである. 実線は筆者らの最適補正であり, E の変化量が 10^{-6} 以下になるまで高次の補正を行った. 破線は Hartley-Sturm 法の再投影誤差である.

横軸は $\sigma = 10$ (画素) までとっているが, このような実際問題では意味がないほど大きいノイズまで調べたのは, 計算に問題が生じないことを確認するためである.

図 3(a),(b) から分かるように, 安定なカメラ配置でも不安定なカメラ配置でも Hartley-Sturm 法と最適補正の結果は同じである. 数値的にも有効数字が一致し, 数学的に等価な計算を行っていることが確認される.

8.2 3次元復元の誤差

図 3 からわかるように, 再投影誤差はカメラの安定な配置でも不安定な配置でも基本的に同じである. これはノイズが画像面で発生し, 統計的最適化が画像面上で行われるためである. すなわち, ノイズの統計的性質(実験では等方同一正規分布)が同じであれば, 最適化は映っているシーンの内容にはまったく無関係である.

カメラが安定か不安定かで影響を受けるのは対応点の補正ではなく, 復元した 3次元位置の信頼性である. これを見るために 3次元復元を行い, 復元位置までの奥行の逆数¹¹(“逆距離”)を誤差がないときに $\bar{\rho}$, 誤差があるときに ρ として $(\rho - \bar{\rho})^2$ を評価した. これをすべての点について平均し, さらに 1000 回の異なる誤差に対して平均したものの平方根(平方平均二乗誤差)を計算し, σ を横軸にとってプロットしたものが図 4 である. この場合はノイズを極端に増やすと意味のない 3次元復元が行われるので, σ

¹¹ 距離そのものでなく逆数を取るの, 距離が無限大に発散したり, 誤差のために視線が開いて負の遠方にくる場合なども含めて評価するためにであり, よく使われている評価法である.

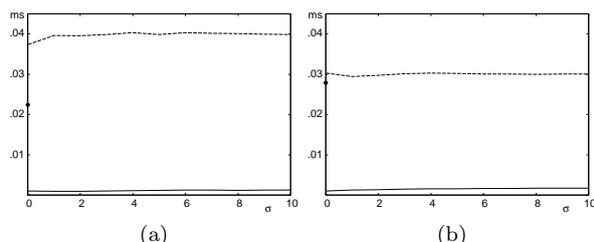


図 5: 実行時間の比較 (単位はミリ秒) . 実線: 提案手法 . 破線: Hartley-Sturm 法 . (a) 安定なカメラ配置 (b) 不安定なカメラ配置

の範囲を $0 \sim 0.5$ (画素) とした .

図 4(a),(b) の縦軸の目盛を比較して分かるように , 当然ながら不安定なカメラ配置では , 画像上のわずかな誤差でも復元位置の信頼性が著しく低下する .

8.3 実行時間の比較

以上から分かるように , 理論的には Hartley-Sturm 法にはエピ極点が特異点であるが , それ以外では彼らの方法も最適補正も解に差がない . 差があるのはその実行時間である . これを比較したのが図 5 である (1000 回の試行の平均) .

計算には C 言語を用い , Hartley-Sturm 法中の 6 次方程式の解法には固有値法 [11] を用いた . CPU には Intel Core2Duo E6700 2.66GHz , 主メモリ 4GB , OS には Linux を用いた .

図 5 から分かることは , Hartley-Sturm 法の実行時間はノイズにほとんど依存しないことである . これは彼らの方法が常に同じ代数的な計算を行っているためである . 調べると , ほとんどの実行時間が 6 次方程式の解法に費やされている . ただし , $\sigma = 0$ のときは計算がやや高速になっている (縦軸上の黒点で示す) . これは 6 次方程式が 5 次に次数低下するためと思われる . また , 安定したカメラ配置 (ほぼ平行なエピ極線) の場合よりも不安定なカメラ配置 (放射状のエピ極線) の場合のほうが 6 次方程式が解きやすくなるようである .

それに対して , 筆者らの最適補正は反復法であるため , 誤差が大きいと反復回数がやや増加して , 実行時間が多少増加する . しかし , 図 5 からわかるように , 筆者らの最適補正が常に Hartley-Sturm 法よりもはるかに効率的である .

詳細に検討すると , 筆者らの最適補正法は非常に単純な計算の組み合わせなので , 実行時間はプログラムの書き方 , 用いるマトリクス演算ライブラリ , コンパイラの最適化などによって大きく変化するこ

とがわかった . それに対して Hartley-Sturm 法は決まった代数的計算をしているので , どのようにインプリメントしても実行時間にほとんど変化が見られなかった .

9. まとめ

本論文では , ステレオ 2 画像から対応点の 3 次元位置を復元する三角測量の計算として筆者ら [4, 5, 9, 10] が以前に提案した最適補正の高次補正法を示した . そして , これを世界標準となっている Hartley-Sturm 法と実験的に比較した . まず , Hartley-Sturm 法はエピ極点が特異点となってそこで計算が破綻するが本論文の方法には特異性が存在しないことを指摘した . しかし , それ以外では両者は同一の解を計算することを数値実験によって確認した . そして , 実行時間は本論文の方法が Hartley-Sturm 法にはるかに効率的であることを示し , Torr ら [12] の経験を実証した . したがって , 実際の応用では最適補正を用いればよく , Hartley-Sturm 法を用いる理由がない .

参考文献

- [1] R. I. Hartley, In defense of the eight-point algorithm, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **19-6** (1997-6), 580–593.
- [2] R. I. Hartley and P. Sturm, Triangulation, *Comput. Vision Image Understand.*, **68-2** (1997-11), 146–157.
- [3] R. Hartley and A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2000.
- [4] 金谷健一, 幾何学的補正問題の最適計算と精度の理論限界, *情報処理学会論文誌*, **37-3** (1996-3), 363–370.
- [5] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice* Elsevier, Amsterdam, the Netherlands, 1996; reprinted, Dover, York, NY, U.S.A., 2005.
- [6] 金谷健一, 三島等, 未校正カメラによる 2 画像からの 3 次元復元とその信頼性評価, *情報処理学会論文誌: コンピュータビジョンとイメージメディア*, **42-SIG 6** (2001-6), 1–8.
- [7] K. Kanatani and Y. Sugaya, High accuracy fundamental matrix computation and its performance evaluation, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, **E90-D-2** (2007-2), 579–585.
- [8] 金谷健一, 菅谷保之, 高ノイズレベルにおける基礎行列の最尤推定, *情報処理学会研究報告*, 2007-CVIM-160-9 (2007-9), 49–56.
- [9] Y. Kanazawa and K. Kanatani, Reliability of 3-D reconstruction by stereo vision, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, **E78-D-10** (1995-10), 1301–1306.
- [10] 川島徹, 金澤靖, 金谷健一, ステレオによる 3 次元復元の信頼性評価, *情報処理学会研究報告*, 94-CV-90-5 (1994-9), 33–40.

- [11] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1992.
- [12] P. H. S. Torr and A. Zissermann, Performance characterization of fundamental matrix estimation under image degradation, *Mach. Vis. Appl.*, **9**-5/6 (1997-3), 321-333.

付録：Hartley-Sturm 法

Hartley-Sturm 法は次のように書ける。ただし，比較のため，本論文の方法と記法を統一している。

入力：基礎行列 F ，対応点の座標 (x, y) ， (x', y') 。

出力：補正した対応点の座標 (\hat{x}, \hat{y}) ， (\hat{x}', \hat{y}') 。

手順：

1. FF^T ， $F^T F$ の固有値 0 の単位固有ベクトルをそれぞれ $e = (e_1, e_2, e_3)^T$ ， $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)^T$ とする。
2. 次の角度 θ ， θ' を計算する。

$$\begin{aligned}\theta &= \arg(f_0 e_1 - x e_3, f_0 e_2 - y e_3), \\ \theta' &= \arg(f_0 e'_1 - x' e'_3, f_0 e'_2 - y' e'_3)\end{aligned}\quad (49)$$

ただし， $\arg(x, y)$ は原点から点 (x, y) への方向が x 軸から成す偏角を表わす。

3. 次の行列 L ， L' ， R ， R' を計算する。

$$\begin{aligned}L &= \begin{pmatrix} 1 & -x/f_0 \\ 1 & -y/f_0 \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad L' = \begin{pmatrix} 1 & -x'/f_0 \\ 1 & -y'/f_0 \\ & 1 \end{pmatrix}, \\ R &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \\ & & 1 \end{pmatrix}, \\ R' &= \begin{pmatrix} \cos \theta' & \sin \theta' \\ -\sin \theta' & \cos \theta' \\ & & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (50)$$

4. 基礎行列 F を次のように変換する。

$$\tilde{F} = R(L^{-1})^T F L'^{-1} R'^{-1}\quad (51)$$

5. 次の a ， b ， c ， d ， f ， f' を計算する。

$$a = \tilde{F}_{22}, \quad b = \tilde{F}_{32}, \quad c = \tilde{F}_{23}, \quad d = \tilde{F}_{33},$$

$$f = \begin{cases} -\frac{\tilde{F}_{12}}{b} & |b| \geq |d| \\ -\frac{\tilde{F}_{13}}{d} & |b| < |d| \end{cases},$$

$$f' = \begin{cases} -\frac{\tilde{F}_{21}}{c} & |c| \geq |d| \\ -\frac{\tilde{F}_{31}}{d} & |c| < |d| \end{cases}\quad (52)$$

6. 次の t の 6 次方程式の解を求める。

$$a_6 t^6 + a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 = 0\quad (53)$$

$$\begin{aligned}a_6 &= -f^4 ac(ad - bc) \\ a_5 &= (a^2 + f'^2 c^2)^2 - f^4 (ad - bc)(ad + bc) \\ a_4 &= 2(a^2 + f'^2 c^2)(ab + f'^2 cd) \\ &\quad - f^2 (ad - bc)(2ac + f^2 bd) \\ a_3 &= 2(a^2 + f'^2 c^2)(b^2 + f'^2 d^2) + 4(ab + f'^2 cd)^2 \\ &\quad - 2f^2 (ad - bc)(ad + bc) \\ a_2 &= 4(ab + f'^2 cd)(b^2 + f'^2 d^2) \\ &\quad - (ad - bc)(ac + 2f^2 bd) \\ a_1 &= (b^2 + f'^2 d^2)^2 - (ad - bc)(ad + bc) \\ a_0 &= -(ad - bc)bd\end{aligned}\quad (54)$$

7. その解のうち，次式を最小にするもの t_0 とする。

$$E(t) = \frac{t^2}{1 + f^2 t^2} + \frac{(ct + d)^2}{(at + b)^2 + f'^2 (ct + d)^2}\quad (55)$$

8. もし $E(t_0) \leq E(\infty)$ なら \tilde{x} ， \tilde{y} ， \tilde{x}' ， \tilde{y}' を次のように計算する。

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \frac{f_0 f t_0^2}{1 + f^2 t_0^2}, \quad \tilde{y} = \frac{f_0 t_0}{1 + f^2 t_0^2}, \\ \tilde{x}' &= \frac{f_0 f' (ct_0 + d)^2}{f'^2 (ct_0 + d)^2 + (at_0 + b)^2}, \\ \tilde{y}' &= -\frac{f_0 (at_0 + b)(ct_0 + d)}{f'^2 (ct_0 + d)^2 + (at_0 + b)^2}\end{aligned}\quad (56)$$

そうでなければ次のように置く。

$$\tilde{x} = \frac{f_0}{f}, \quad \tilde{y} = 0,$$

$$\tilde{x}' = \frac{f_0 f' c^2}{f'^2 c^2 + a^2}, \quad \tilde{y}' = -\frac{f_0 ac}{f'^2 c^2 + a^2}\quad (57)$$

9. (\hat{x}, \hat{y}) ， (\hat{x}', \hat{y}') を次の関係式によって計算する。

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \hat{x}/f_0 \\ \hat{y}/f_0 \\ 1 \end{pmatrix} &= L^{-1} R^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{x}/f_0 \\ \tilde{y}/f_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \hat{x}'/f_0 \\ \hat{y}'/f_0 \\ 1 \end{pmatrix} &= L'^{-1} R'^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{x}'/f_0 \\ \tilde{y}'/f_0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (58)$$